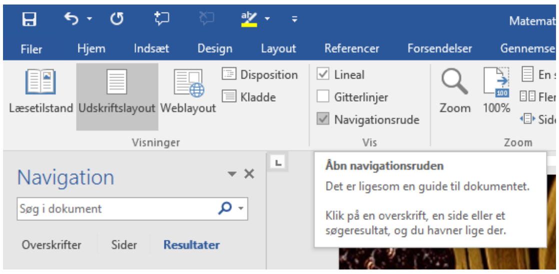
MATEMATIKBANKEN

FORMELSAMLING

| FP9 | FP10 | Noget ekstra | Hjælpeark | Guldark |

Vejledning til brug af formelsamlingen

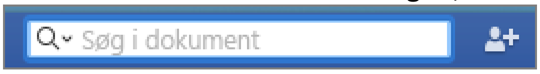
Denne formelsamling er større end normale formelsamlingen. Det betyder også, at det er noget sværere at finde rundt.



I Windows kan man trykke Ctrl-b eller trykke "Vis" og sætte flueben ved "Navigationsrude", så der kommer en navigationsrude op.

Her er det nu nemt at søge på det, som man gerne vil finde frem til.

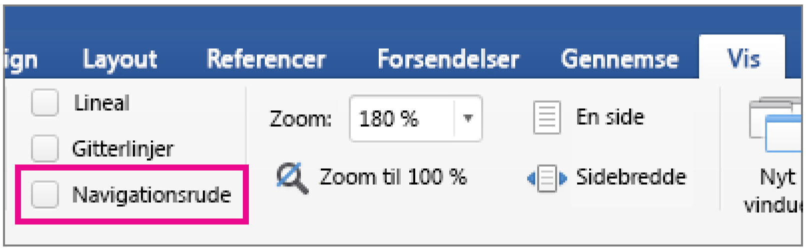
På Mac skriv ordet eller sætningen, du vil finde, i søgefeltet i øverste højre hjørne af dokumentet.



Indtast tekst til at søge i dokumentet.

Word fremhæver alle forekomster af ordet eller sætningen i hele dokumentet.

Eller Klik på "Vis"→ "Navigationsrude".



Ellers er der en indholdsfortegnelse der er opbygget efter vores 8 forløb.

1. Geometri
2. Tal og Algebra
3. Førstegradsfunktioner
4. P.E.T: Pythagoras, ensvinklede trekanter og trigonometri
5. Statistik
6. Økonomi
7. Kombinatorik og sandsynlighed
8. Andrefunktioner

Derudover er der en hel del mere.

Alle overskrifter i indholdsfortegnelsen kan man trykke på. Derefter hopper man videre ned til emnet. (Laver man selv rettelser i formelsamlingen, skal man huske at opdatere indholdsfortegnelsen).

Har du forslag til tilføjelse eller rettelser, er du velkommen til at sende en mail info@matematikbanken.dk

OVERSIGT OVER EMNER

Indhold

Geometri

Længde

Længde er endimensional og består af en række tætsiddende punkter, som ikke har nogen højde eller bredde. Længden kan måles i forskellige enheder.

Linje

Uendelig lang længde.

Linjestykke

En længde mellem 2 punkter.

Parallelle linjer

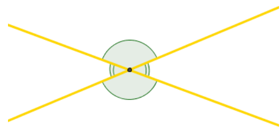
Linjer med samme hældning som derfor aldrig krydser hinanden.

Vinkler

Topvinkel

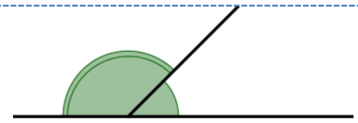
To rette linjer, der krydser hinanden, danner to topvinkler. Topvinkler er parvis lige store.

De 2 parvise topvinkler, giver tilsammen altid 360°



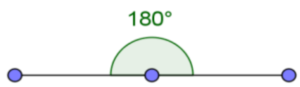
Nabovinkler

To vinkler, der har et ”ben” til fælles og summen af dens vinkler er 180°. Dem kalder vi nabovinkler



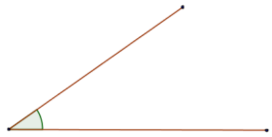
Lige vinkel

En vinkel som er netop 180°
Der kan aldrig være en lige vinkel i en trekant



Spids vinkel

En vinkel som er mindre end 90°
Der vil altid være mindst to spids vinkler i en trekant.



Ret vinkel

En vinkel som er netop 90°
Der kan aldrig være mere end en ret vinkel i en trekant

Stump vinkel

En vinkel som er større end 90°
Der kan aldrig være mere end en stump vinkel i en trekant

Vinkelsum

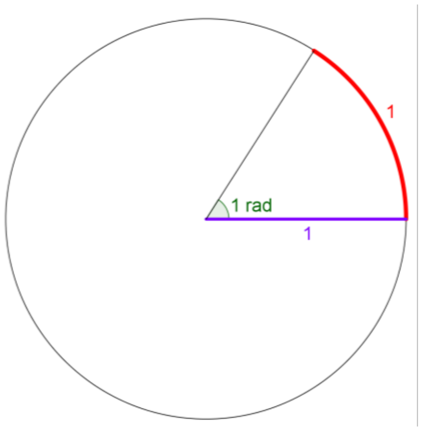
Når man lægger alle vinklerne i polygonen sammen.

Trekant har en vinkelsum på 180°
En firkant har en vinkelsum på 360°
En femkant har en vinkelsum på 540°

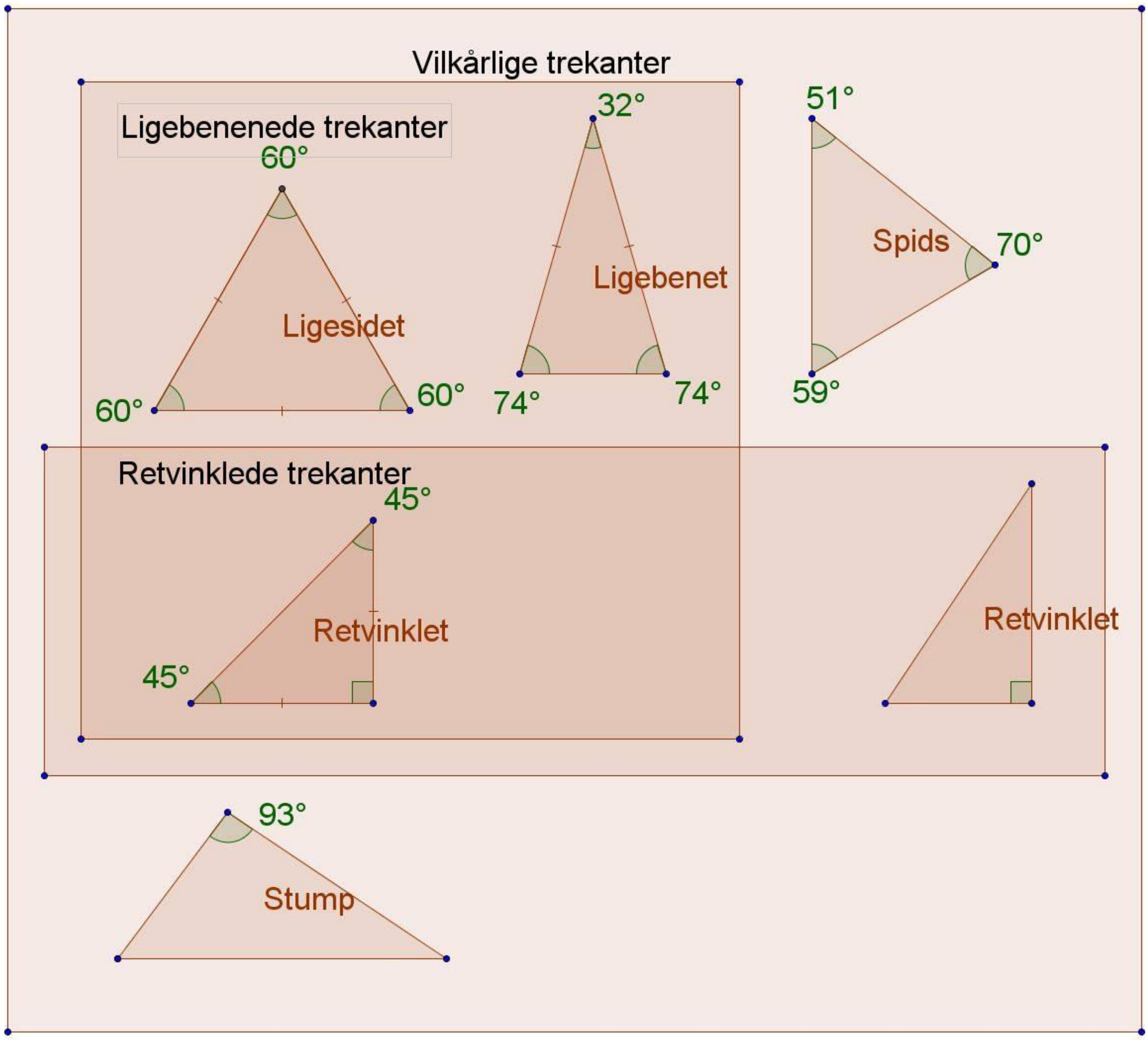
Vinkelsum i et n-kantet-polygon (n er antallet af kanter)

$$vinkelsum = (n-2) \cdot 180°$$

Kongruente vinkler	To vinkler med samme vinkelsum
Komplementære vinkler	To vinkler som til sammen har en vinkelsum på 90°
Supplementære vinkler	To vinkler som til sammen har en vinkelsum på 180°
Eksplementære vinkler	To vinkler som til sammen har en vinkelsum på 360°

Radianer	1 radian er den vinkel, hvor cirkelbuen (rød) har samme længde som radius (blå) i cirklen.  En hel cirkel indeholder 2 π radian.
Omregning radianer til grader	$grader = \frac{radianer \cdot 180}{\pi}$
Omregning grader til radianer	$radianer = \frac{grader \cdot \pi}{180}$
Regulær polygon	Betyder at siderne er lige lange og alle vinkler er lige store.

Trekanter



Ligesidet trekant

En ligesidet trekant er regulær. De 3 vinkler er 60°. I en ligesidet trekant vil både højder, vinkelhalveringslinjer, medianer og midtnormaler ligge oven i hinanden. Dvs. deres skæringspunkt, vil være trekantens tyngdepunkt og centrum for den omskrevne- og indskrevne cirkel

Ligebenet trekant

I en ligebenet trekant er 2 sider lige lange og 2 vinkler lige store. Det to vinkler, som er lige store, kaldes for grundvinkler.

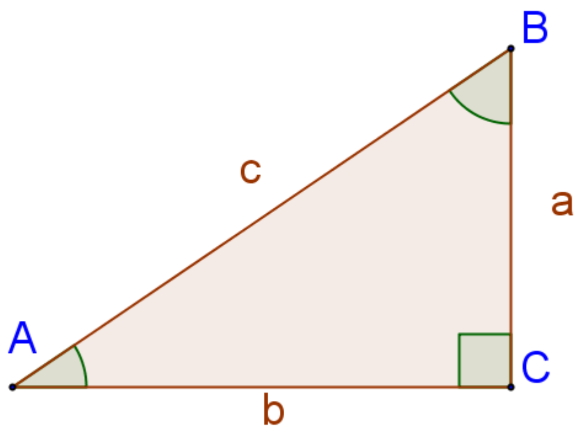
Stumpvinklet trekant

En stumpvinklet trekant består af en stump vinkel på over 90° og to spidse vinkler på under 90°.

Spidsvinklet trekant
En spidsvinklet trekant består af 3 spidse vinkler på under 90°

Retvinklet trekant
En retvinklet trekant består af 1 ret vinkel på 90° og to spidse vinkler på under 90°.

Navngivning af sider i en retvinklet trekant



I en retvinklet trekant hedder den rette vinkel altid C.
Man går så med uret, så hedder den næste vinkel A og derefter B.
Siderne navngives i forhold til modstående vinkel.
Side c ligger over for vinkel C
Side a ligger over for vinkel A
Side b ligger over for vinkel B

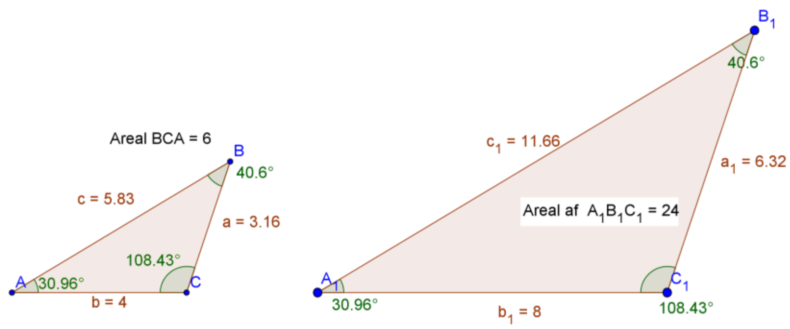
De 2 korte sider (a og b) kaldes for kateter
Den længste side (c) kaldes for hypotenusen

Sider skrives altid med små bogstaver (eks. abc)
Vinkler skrives altid med store bogstaver (eks. ABC)

Ensvinklede trekanter
Hvis en trekant parvis har samme vinkler, kalder man dem ensvinklede.

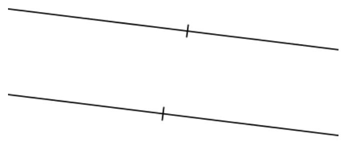
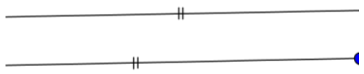
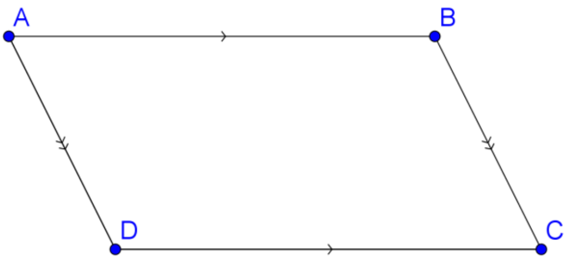
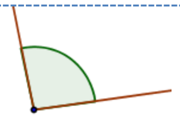
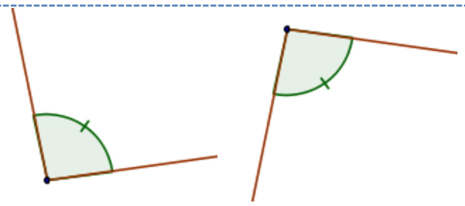
Forholdet mellem de parvis ens sider er ens for alle sider.

I eksemplet er forholdet mellem ΔABC og $\Delta A_1B_1C_1$ er 2

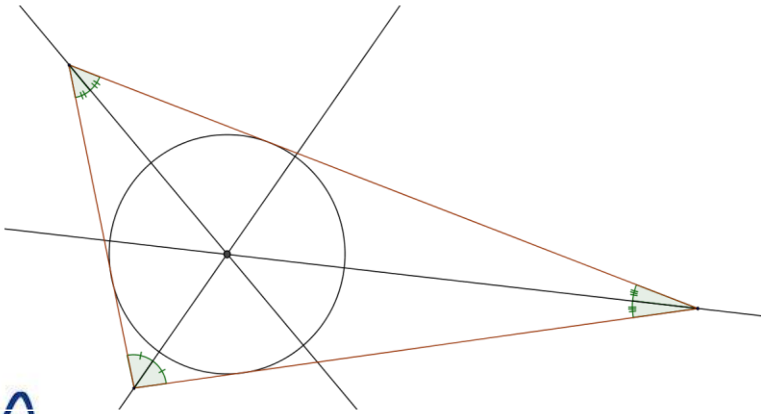


Det kan også udtrykkes som $forhold = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$

Tegn og symboler

ΔABC	Punkterne A, B og C danner en trekant
 a)  b)	Linjestykker med samme antal streger som markering har samme længde. Linjerne på figur a har sammen længde. Det er linjerne på figur b også. Men linjerne i figur a og b er IKKE samme længde.
	Linjer med samme antal pile som markering er parallelle. Linjestykkerne $\lvert AB\rvert$ og $\lvert CD\rvert$ er parallelle, hvilket kan skrives som: AB∥CD Modsat er Linjestykkerne $\lvert AB\rvert$ og $\lvert BC\rvert$ ikke parallelle, hvilket kan skrives som: AB∦BC
$\lvert AB\rvert$	Ofte vil man skrive et linjestykke med to lodrette linjer. Eks. $\lvert AB\rvert$ er linjestykket, som går fra punktet af A til punktet B.
	Vinkel Kan skrives som ∠ABC, hvor vinklen er ved punktet B.
	Vinkel med samme markering er helt ens. Har de ingen markering, så ved man ikke om de er ens.

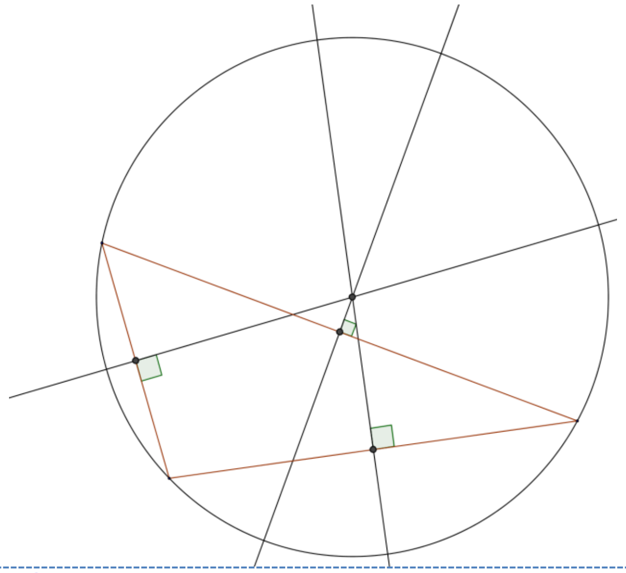
Linjer i en trekant



Vinkelhalveringslinjer

Dele hver vinkel i 2 lige store vinkler.

Vinkelhalveringslinjernes skæringspunkt er centrum for trekantens indskrevne cirkel

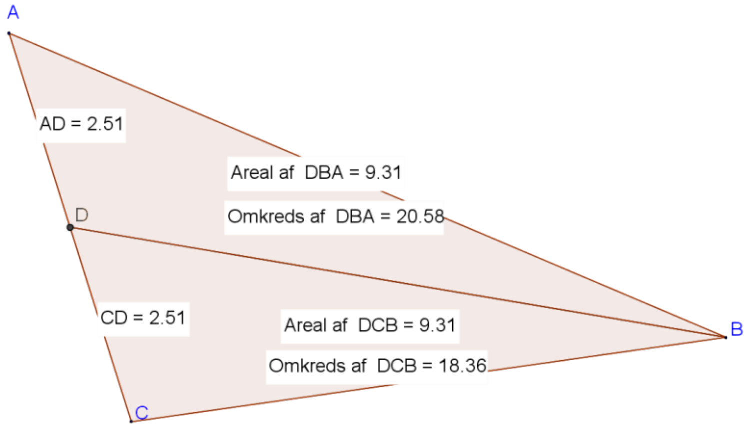


Midtnormaler

En midtnormal deler en side i en trekant i 2 ens længder.

Midtnormalen går vinkelret ud fra linjestykkets midtpunkt.

Midtnormalernes skæringspunkt er centrum for trekantens omskrevne cirkel



Median

En median går fra vinkelspids til modsatte sides midtpunkt.

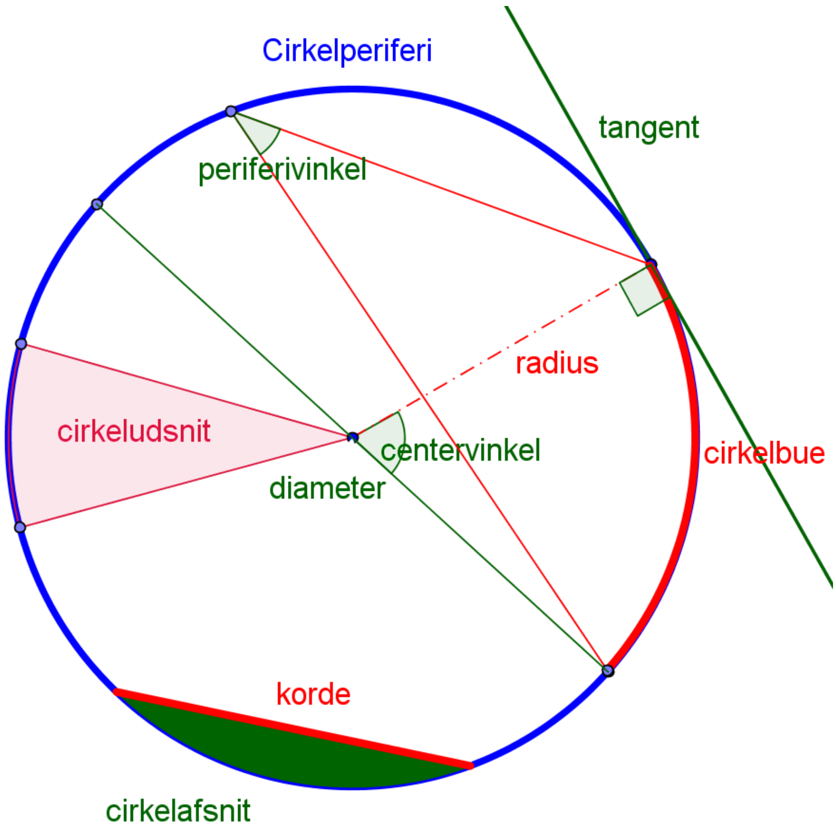
En median deler en trekant i 2 lige store arealer.

Omkredsen kan dog godt være forskellig.

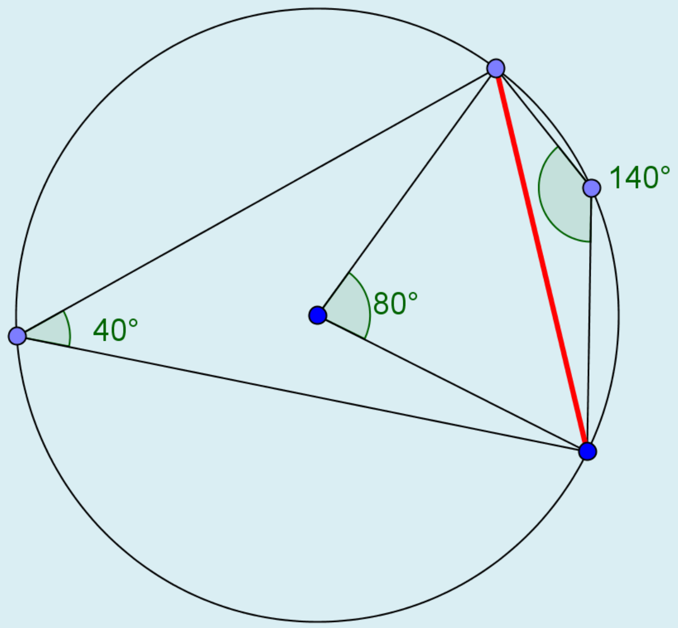
Skæringspunktet mellem flere medianer er trekantens tyngdepunkt

Cirkler

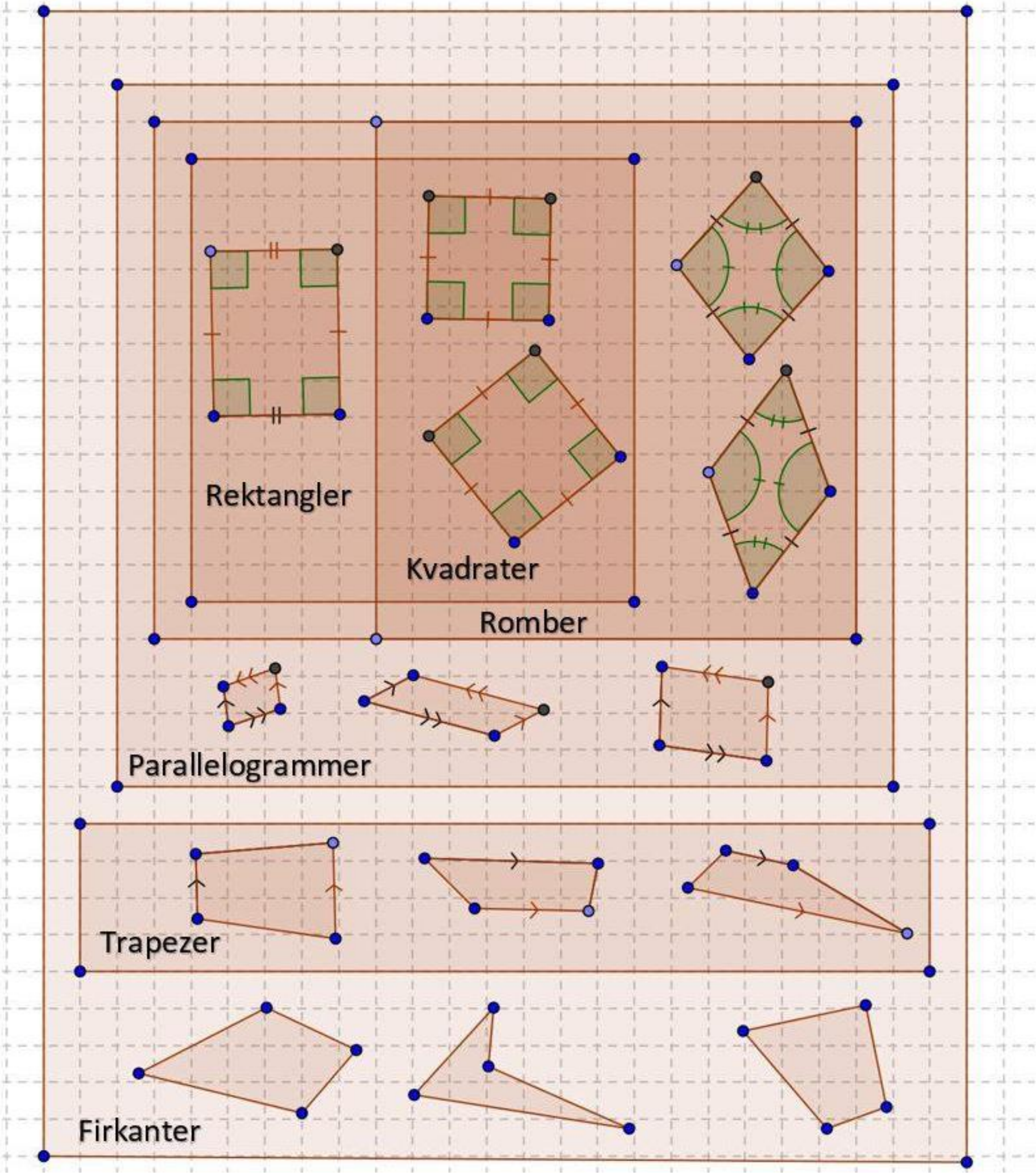
En cirkel er defineret som en punkter, der har samme afstand til et punkt. Punktet kalder vi for centrum og afstand fra punkterne til centrum kaldes radius



Centrum	Punktet der ligger lige langt væk fra alle punkter der ligger på cirkelperiferien. (Man kan kalde det midtpunktet)
Cirkelperiferi	Cirklens omkreds, afstand fra cirkelperiferi til centrum er altid radius
Cirkelbue	Et stykke af omkredsen, givet i forhold til en centervinkel $$længde\ cirkelbue = omkreds \cdot \frac{centervinkel}{360}$$
Radius	Afstanden fra centrum til cirkelperiferi
Diameter	En korde der gå gennem centrum. Diameter er $2 \cdot$ radius
Cirkeludsnit	Et cirkeludsnit er en del af cirklens areal, givet i forhold til en centervinkel $$areal\ cirkeludsnit = areal \cdot \frac{centervinkel}{360}$$
Tangent	En linje der netop kun rører i et punkt på cirkelperiferien og står vinkelret på radius.
Korde	Et ret linjestykke der går fra et punkt på cirkelperiferien til et andet punkt på periferien
Cirkelafsnit	Arealet mellem en cirkelbue og en korde.
Centervinkel	Vinkel med toppunkt i centrum

Periferivinkel	Vinkel med toppunkt på periferien
	 Hvis periferivinklen og centervinklen, deler korde, så gælder: Periferivinklen er altid halvt så stor som centervinklen, når periferivinklen ligger uden for centervinklens ben Hvis periferivinklen ligger inden for centervinklens ben, så vil vinklen altid være $180 - \frac{centervinkel}{2} = periferivinkel$

Firkanter



Rektangler
Kvadrater
Romber
Parallelogrammer
Trapezer
Firkanter

Areal og omkreds

Arealet har altid enhed i anden potens ”enhed^2”

Trekant

Omkreds:

$$O = a + b + c$$

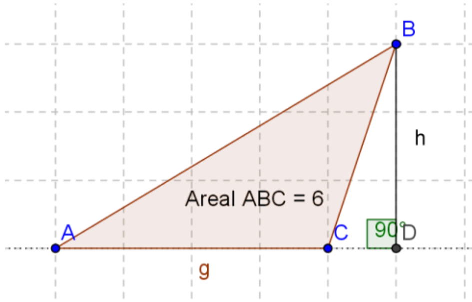
O: omkreds
a, b, c: sidelængder

Areal:

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

h: højde
g: grundlinje

Højden er altid vinkelret på grundlinjen
Man bestemmer selv hvilken side der er grundlinjen

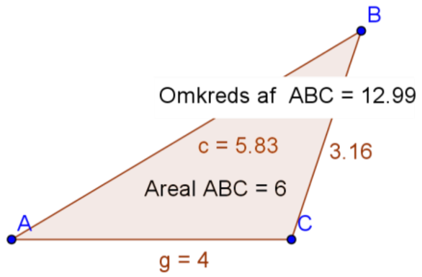


$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \ = 6$$

Herons formel

Bruges til at finde et areal

$$omkredsen = a + b + c$$
$$s = \frac{1}{2} \cdot (omkredsen)$$
$$A = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$$
$$\approx 5{,}99$$



Eks.
Virker kun på trekanter

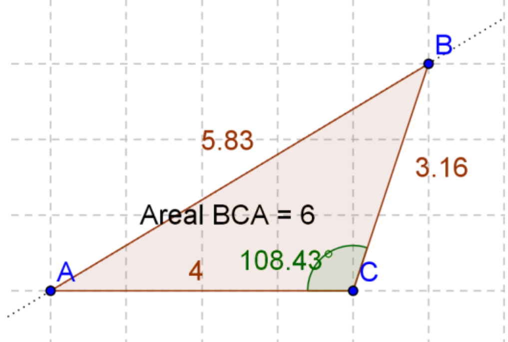
$$s = \frac{1}{2} \cdot 12{,}99 = 6{,}495$$

$$\sqrt{6{,}495 \cdot (6{,}495 - 3{,}16) \cdot (6{,}495 - 4) \cdot (6{,}495 - 5{,}8}$$
$$\approx 5{,}99$$

Appelsinformlen

Navnet kommer fra når man læser formlen, lyder det som ”en halv a b sin”
Man skal kende 2 sider og den vinkel der ligger mellem de 2 sider

$A = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\,(C)$ Man bestemmer selv hvilken vinkel der er C, bare husk at siderne man bruger er benene til den vinkel man kender.



Eks.

$$\frac{1}{2} \cdot 3{,}16 \cdot 4 \cdot (\sin\,(108{,}43) \approx 5{,}995851$$

Regulær trekant

Se formel for regulære polygoner

Rektangel

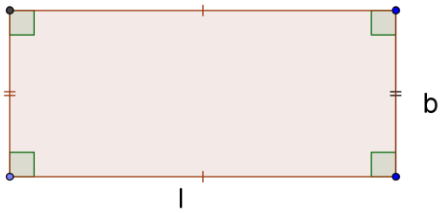
Har fire sider

$A = l \cdot b$

$O = 2l + 2b$

Alle vinkler er 90 °

Siderne er parvis lige lange



Kvadrat

Har fire lige lange sider

Er regulær

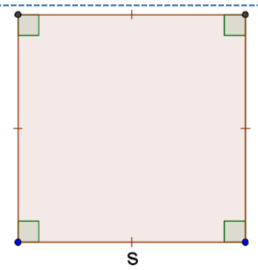
$A = s^2$

$O = 4s$

Alle sider er lige lange og alle vinkler er 90 °

Diagonaler er lige lange

$diagonal = \sqrt{s^2 + s^2}$



Parallelogram

$A = h \cdot g$

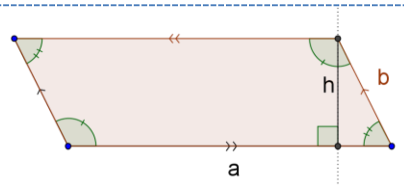
h=højde

g=grundlinje

$O = 2a + 2b$

Siderne er parvis parallelle

Diagonalerne er ikke lige lange



Rombe

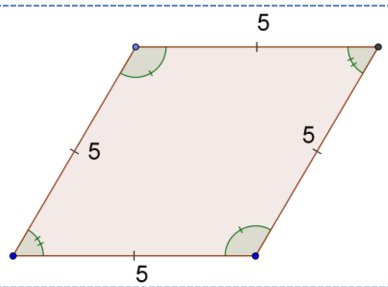
Alle sider er lige lange

Vinkler er parvis lige store

Diagonaler er ikke ens

$.A = \frac{D \cdot d}{2}$

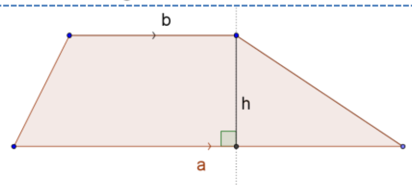
D er store diagonal og d er lille diagonal



Trapez

$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (a + b)$

Netop to af siderne er parallelle



Cirkel

$A = r^2 \cdot \pi$

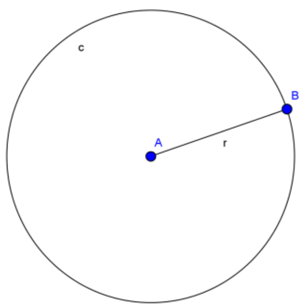
$O = 2 \cdot r \cdot \pi$

Kender man Arealet

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

Kender man omkredsen

$$r = \frac{O}{2 \cdot \pi}$$



Cirkelring

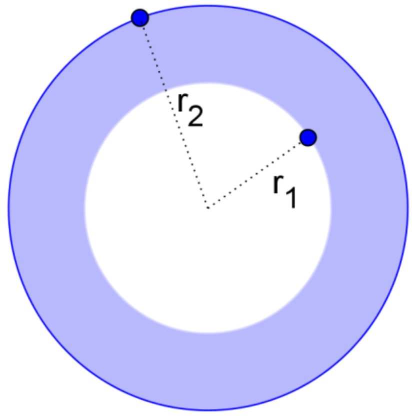
$A = (r_2^2 \cdot \pi) - (r_1^2 \cdot \pi)$

Eller

$A = (r_2^2 - r_1^2) \cdot \pi$

r_2: Den store cirkels radius

r_1: Den lille cirkels radius



Cirkeludsnit

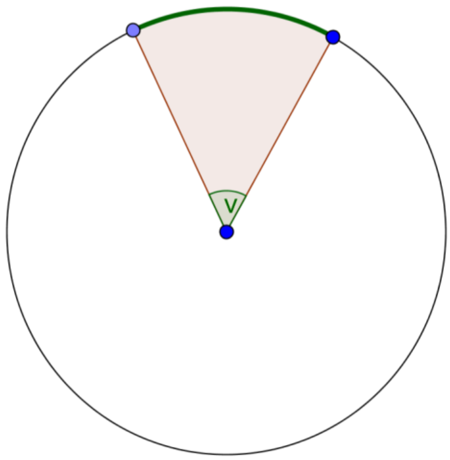
$$A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{v}{360}$$

r: radius

v: vinkel i grader

Buelængde: $\pi \cdot r \cdot 2 \cdot \frac{v}{360}$

$$O = \pi \cdot r \cdot 2 \cdot \frac{v}{360} + 2r$$

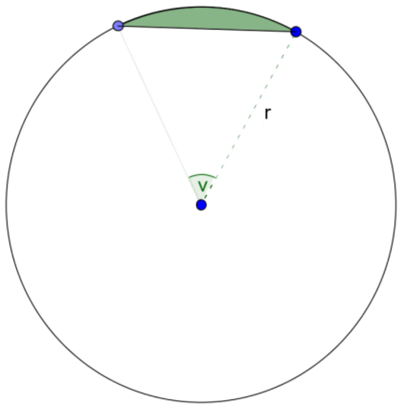


Cirkelafsnit (Det grønne)

$$A = \frac{r^2}{2} \cdot \left(\pi \cdot \frac{v}{180} - sin(v)\right)$$

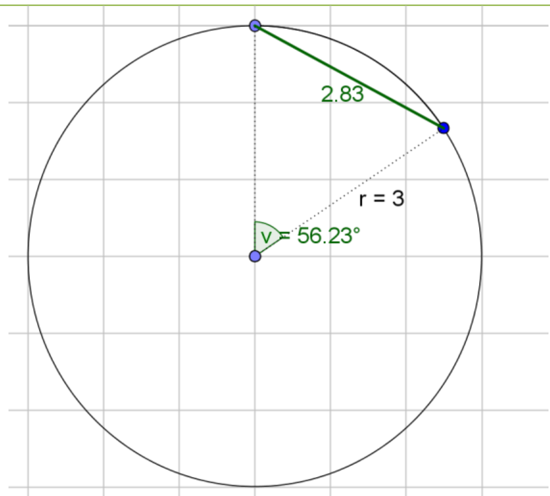
r: radius

v: vinkel i grader



Korde

$$Længde = 2 * r * sin\left(\frac{v}{2}\right)$$



Eksempel

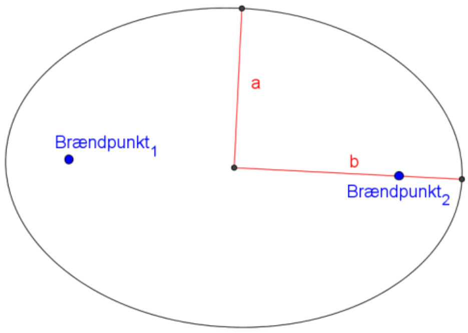
$$2 \cdot 3 \cdot \sin\left(\frac{56{,}23}{2}\right) \approx 2{,}827$$

Ellipse

$A = \pi \cdot a \cdot b$

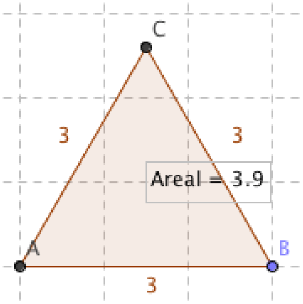
$$O = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

A: areal
O: omkreds



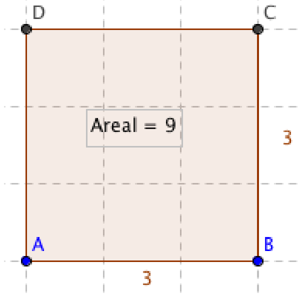
Areal ud fra sidelængden i regulære polygoner

Areal for en ligesidet trekant



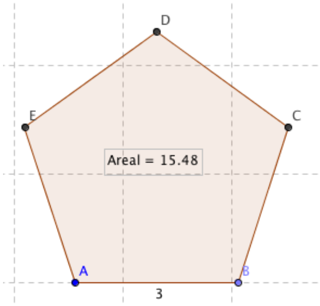
$$\mathbf{0,433 \cdot s^2 = A}$$
$$0{,}433 \cdot 3^2 = 3{,}897$$

Areal for en ligesidet firkant (kvadrat)



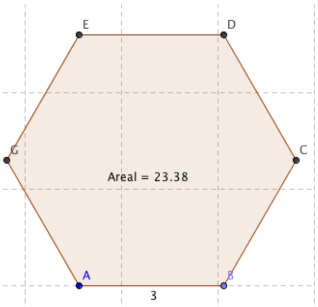
$$s^2 = A$$
$$3^2 = 9$$

Areal for en regulær femkant



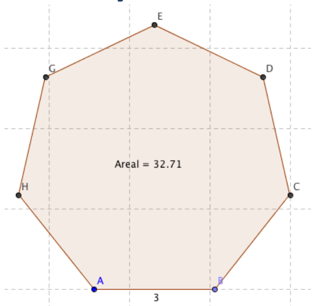
$$1{,}7205 \cdot s^2 = A$$
$$1{,}7205 \cdot 3^2 \approx 15{,}4845$$

Areal for en regulær sekskant



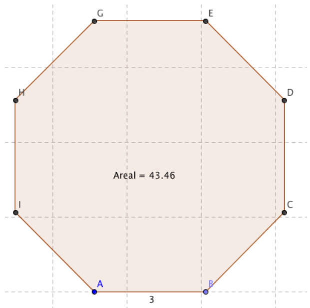
$$2{,}5981 \cdot s^2 = A$$
$$2{,}5981 \cdot 3^2 = 23{,}38$$

Areal for en regulær syvkant



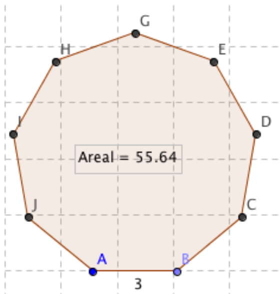
$$3{,}6339 \cdot s^2 = A$$
$$3{,}6339 \cdot 3^2 = 32{,}71$$

Areal for en regulær ottekant



$$4{,}8284 \cdot s^2 = A$$
$$4{,}8282 \cdot 3^2 = 43{,}46$$

Areal for en regulær nikant



$$6{,}1818 \cdot s^2 = A$$
$$6{,}1818 \cdot 3^2 = 55{,}64$$

Areal for en regulær polygon

n: antal kanter

s: sidelængde

Vinkelsum: $180 \cdot (n-2)$

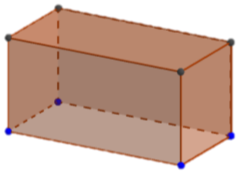
$$\frac{1}{4} \cdot \tan\left(\frac{vinkelsum}{2n}\right) \cdot s^2 \cdot n = A$$

Rumfang og overflader

V, som står for volumen, bruges normalt i formler for rumfanget
O, som står for overfladen, bruges normalt i formler for overfladen

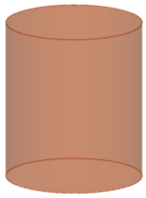
Kasse

$V = h \cdot l \cdot b$
$O = 2 \cdot h \cdot l + 2 \cdot h \cdot b + 2 \cdot l \cdot b$
V: rumfang
O: Overfladeareal



Cylinder

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
G: Grundflade $(\pi \cdot r^2)$
Krummeoverflade $2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$
Overflade i alt $2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot (\pi \cdot r^2)$

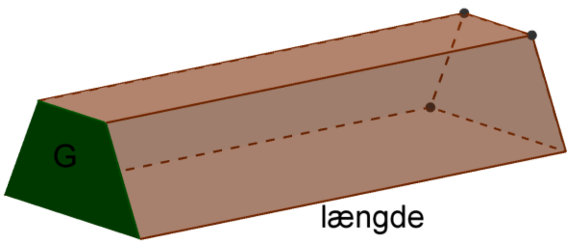


Prisme

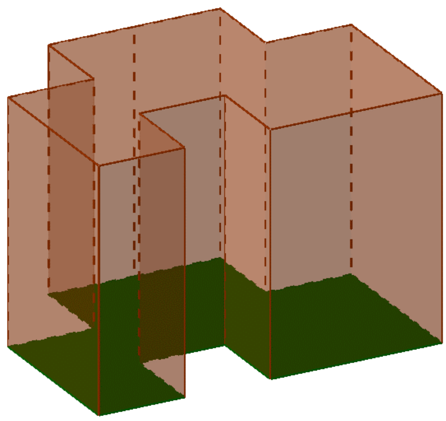
$V = G \cdot h$
G: Den flade der er ens, hele vejen hen, eller hele vejen op.
Overflade: Alle overflader lagt sammen. Der findes ikke en formel, som kan bruges til alle prismer.

En cylinder er også en prisme, men man omtaler det som en cylinder når grundfladen er en cirkel.

Eksempel på grundflade i prisme der ligger ned
Den grønne flade, er ens hele vejen hen.

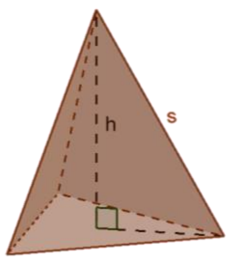


Eksempler på prisme der står op.
Den grønne flade er ens hele vejen op

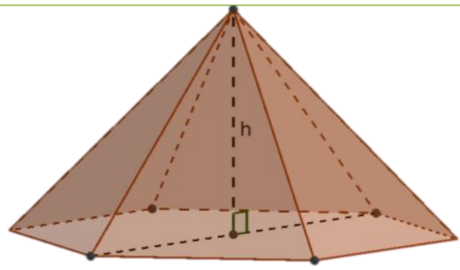


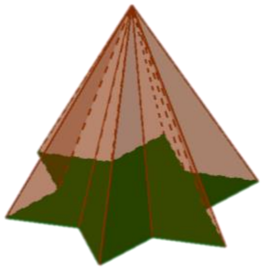
Pyramide

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$
V: Rumfang
G: Bundens grundflade
h: højde
O: Find arealet af hver side af pyramiden og læg det sammen:



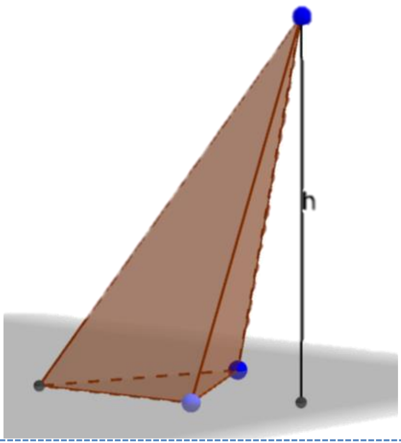
Pyramider behøver ikke have en trekantet grundflade, den kan ligeså godt være ti-kantet - eller en anden form





Skævpyramide

$$V = \frac{1}{3} G \cdot h$$



Pyramidestub

$$V = \frac{1}{3} h(G_1 + G_2 + \sqrt{G_1 \cdot G_2})$$

G_1: Store grundflade

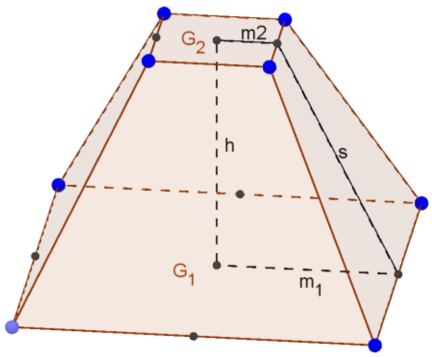
G_2: Lille grundflade

$$s = \sqrt{h^2 + (m_1 - m_2)}$$

s: sidelængden

m_1 og m_2: Længde fra midten af grundfladen til siden

En pyramidestub kan godt have andre typer grundflader en firkantet.



Kugle

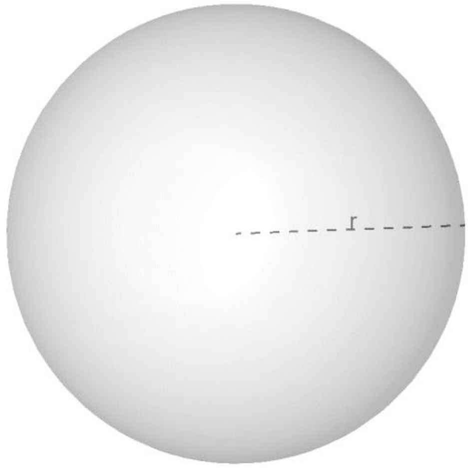
$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$Overflade = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$r = \sqrt[3]{V \cdot \frac{3}{4 \cdot \pi}}$$

Eller

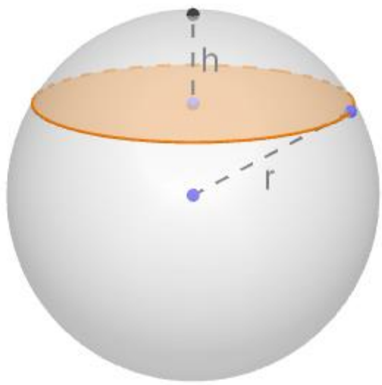
$$r = \sqrt{\frac{Overflade}{4 \cdot \pi}}$$



Kugletop

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot (3r - h)$$

$$Overflade = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$



Kegle

Samme formel som til en pyramide

$$V = \frac{1}{3} h \cdot G$$

h: højde

G: grundflade $(\pi \cdot r^2)$

s: sidelængde

$$s = \sqrt{h^2 + r^2}$$

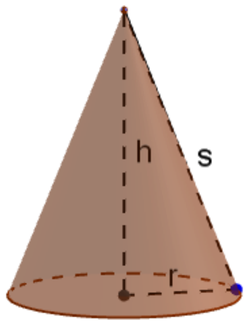
$$h = \sqrt{s^2 - r^2}$$

$$r = \sqrt{s^2 - h^2}$$

$$Krummeoverflade = \pi \cdot r \cdot \sqrt{h^2 + r^2}$$

Eller

$$Krummeoverfalde = \pi \cdot r \cdot s$$



Keglestub

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot ({r_1}^2 + {r_2}^2 + r_1 \cdot r_2)$

$s = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

r_1: store radius

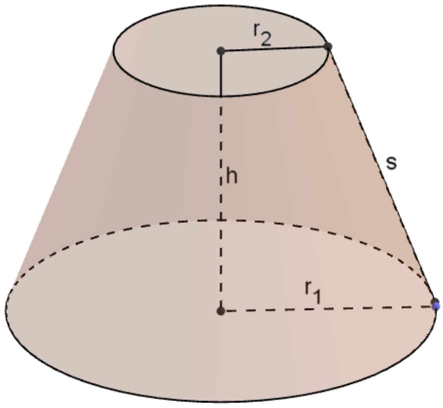
r_2: lille radius

$Krummeoverflade = \pi(r_1 + r_2) \cdot s$

Eller

$Krummeoverflade = \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

Overflade i alt = krumme overflade + top + bund



Skæv cylinder / skæv prisme

Gælder for begge

$$V = G \cdot h$$

Eller

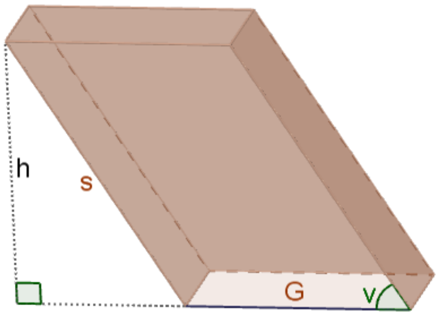
$$V = G \cdot s \cdot \sin(v)$$

Særlig for skæv cylinder:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Eller

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot s \cdot \sin(v)$$

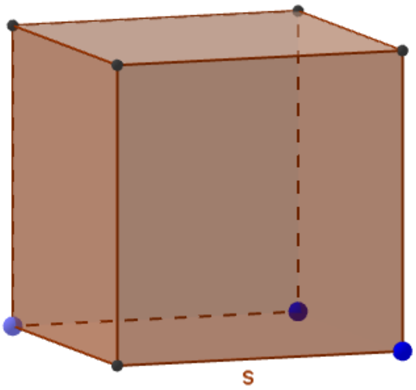


Regulær kasse

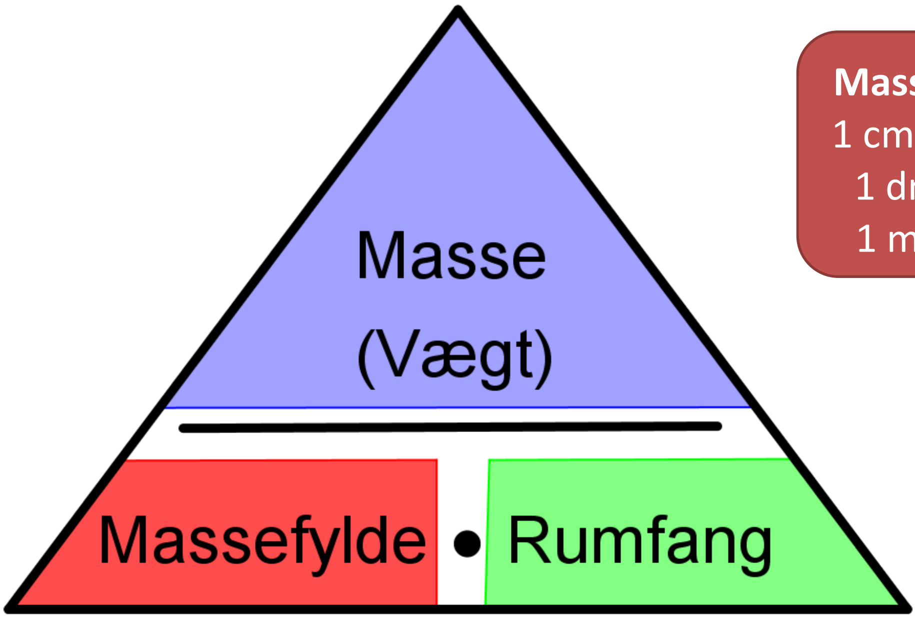
$V = s^3$

$s = \sqrt[3]{V}$

$Overflade = s^2 \cdot 6$



Massefylde



Massefylde fortæller hvad:
1 cm^3 af stoffet vejer i gram
1 dm^3 af stoffet vejer i kg
1 m^3 af stoffet vejer i ton

Formler

$$Masse\ (vægt) = Massefylde \cdot Rumfang$$

$$Massefylde = \frac{Masse\ (vægt)}{Rumfang}$$

$$\boldsymbol{Rumfang} = \frac{Masse\ (vægt)}{Massefylde}$$

Eksempler

Eksempel på beregning af massefylde.
Vi ved at en kugles rumfang er 20 cm^3 og den vejer 200 gram.

$$Massefylde = \frac{200}{20} = 10$$

$$Massefylden\ er\ derfor\ 10\,\frac{g}{cm^3}$$

Omregning:

$$10\,\frac{g}{cm^3} = 10\,\frac{kg}{dm^3} = 10\,\frac{tons}{m^3}$$

Eksempel på beregning af rumfang:
Vi ved at en kugles massefylde er 2,5 og den vejer 2 kg.

$$Rumfang = \frac{2}{2{,}5} = 0{,}8$$
$$Rumfang\ er\ derfor\ 0{,}8\ dm^3$$

Omregning:
$$Rumfang\ i\ cm^3: 0{,}8 \cdot 1000 = 800\ cm^3$$

$$Rumfang\ i\ m^3: \frac{0{,}8}{1000} = 0{,}0008\ m^3$$

Eksempel på beregning af massen (vægten=:
Vi ved at en kugles massefylde er 0,25 og rumfanget er 3m^3.

$$Masse\ (vægt) = 0{,}25 \cdot 3 = 0{,}75$$
Massen (vægten) er derfor 0,75 tons

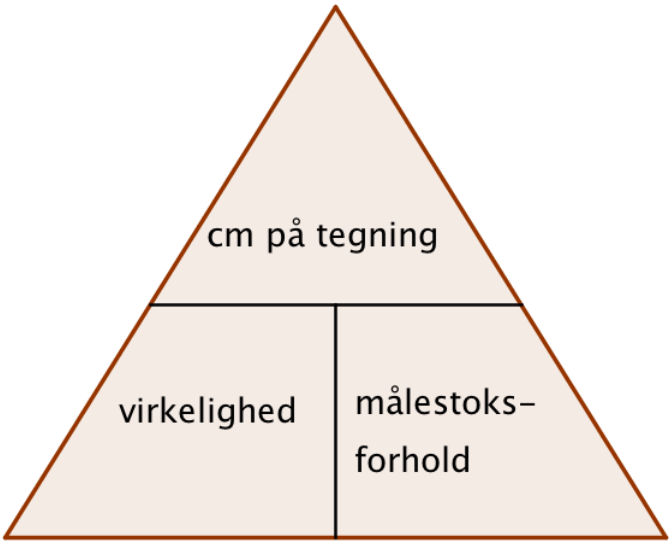
Omregning:
$$Masse\ (vægt)\ i\ kg = 0{,}75 \cdot 1000 = 750\ kg$$

$$Masse\ (vægt)\ i\ kg = 0{,}75 \cdot 1000^2 = 750000\ gram$$

Massefyldetabel

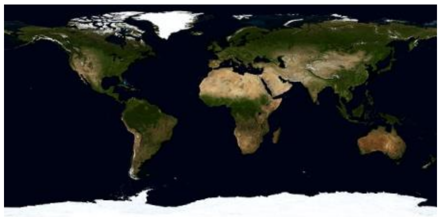
Guld	19,3 $\frac{g}{cm^3}$		Bly	11,4 $\frac{g}{cm^3}$
Vand	1 $\frac{g}{cm^3}$		Vand	1 $\frac{kg}{liter}$
Jern	7,9 $\frac{g}{cm^3}$		Alkohol	0,8 $\frac{g}{cm^3}$
Kviksølv	13,6 $\frac{g}{cm^3}$		Havvand	1,03 $\frac{g}{cm^3}$
Menneske	1,07 $\frac{g}{cm^3}$		Is	0,9 $\frac{g}{cm^3}$
Træ	0,1 - 1,2 $\frac{g}{cm^3}$		Jord	1,3 - 1,8 $\frac{g}{cm^3}$
Sand	1,4 - 1,7 $\frac{g}{cm^3}$		Olie	0,8 $\frac{g}{cm^3}$

Målestok



Afstand i virkeligheden
Du kender hvor langt der er på tegningen og målestoksforholdet

$$Virkelighed = \frac{cm\ på\ tegning}{målestoksforhold}$$



Eksempel:

På en tegning er der 5 cm mellem 2 punkter og kortet er lavet i målestoksforholdet 1:25000

$$Virkelighed = \frac{5}{\frac{1}{25000}}$$

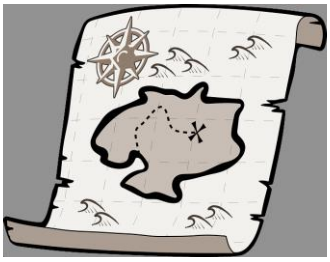
Ligningen løses for Virkelighed vha. CAS-værktøjet WordMatMac.

$Virkelighed = 125000$ cm = 1,25 km

Afstand på tegning

Du kender hvor langt der er i virkeligheden og målestoksforholdet

$$cm\ på\ tegning = virkelighed \cdot målestoksforhold$$



Eksempel:

I virkeligheder er der 500 m hen til skatten, hvor langt fra krydset på kortet skal skatten placeres, når korte er lavet i målestoksforholdet 1:2000.
I dette tilfælde er et en god ide at lave de 500 meter om til centimeter ved at gange med 100.

$$tegning = (500 \cdot 100) \cdot \left(\frac{1}{2000}\right)$$

⇕ *Ligningen løses for tegning vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$tegning = 25cm$$

Målestoksforholdet

Hvis man kender afstanden i virkeligheden og afstanden på tegningen

$$målestoksforhold = \frac{cm\ på\ tegning}{cm\ i\ virkeligheden}$$

Eksempel:

I virkeligheder er der 5 km fra punkt A til B, og på kortet er den 10 cm. Hvilket målestoksforhold er kortet lavet i? Her er det smart at lave de 5 km om til cm ved at gange med 100 000.

$$målestoksforhold = 10/(5 \cdot 100000)$$

⇕ *Ligningen løses for maalestoksfopld vha. CAS-værktøjet WordMatMac.*

$$målestoksforhold = \frac{1}{50000}$$

Som skrives som 1:50 000

Præfix

Præfix ved store eller små enheder. Når man sætter et præfix foran en grundenhed, kan kan angive hvor store en del af enheden man har eller hvor mange af grundenheden man har.

Eks.
1000 meter kan skrives som 1 **kilo**meter.
$\frac{1}{1000}$ af en liter kan skrives som 1 **milli**liter.

Ofte vil man møde præfix i forkortelser af enheder. F.eks. er længden 1 meter lig med 100 centimeter. I stedet for at skrive ordene helt ud, kan de forkortes, således at meter forkortes til m og centi forkortes til c. Dermed kan man skrive 1m = 100cm.

Der findes mange præfix'er - de mest almindelige er:

Præfix	Forkortelse	Værdi (Potens)	Værdi
Tera	T	10^{12}	1 000 000 000 000
Giga	G	10^{9}	1 000 000 000
Mega	M	10^{6}	1 000 000
Kilo	k	10^{3}	1 000
Hekto	h	10^{2}	100
Deka	da	10^{1}	10
Grundenhed	-	10^{0}	1
Deci	d	10^{-1}	0,1
Centi	c	10^{-2}	0,01
Milli	m	10^{-3}	0,001
Mikro	μ	10^{-6}	0,0000001

Læg mærke til at det betyder noget, om man bruger store eller små bogstaver -
1MW (1 megawatt) er ikke det samme som 1mW (1 milliwatt)!

Præfix'er kan i princippet bruges foran alle måleenheder, men ikke alle er lige almindelige.

Som udgangspunkt bør man ikke blande flere præfix'er sammen, men f.eks. 1hkg = 1 hektokilogram = 100 kg bliver anvendt i nogle sammenhænge.

Nogle præfix'er kan "skjule" sig. Arealenheden 1 hektar betyder 1 hekto-ar = 100 ar. 1 ar = 100m^2, så 1 hektar = 100×100m^2 = 10000m^2. 1 hektar forkortes til 1 ha.

Redigeret: 29. oktober 2020

Enhedsomregning eksempel 1

Længder

$$\mathrm{km} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \mathrm{hm} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \mathrm{dam} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \mathrm{m} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \mathrm{dm} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \mathrm{cm} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \mathrm{mm}$$

Areal

$$\mathrm{km}^2 \underset{:10^2}{\overset{\cdot 10^2}{\rightleftarrows}} \mathrm{hm}^2 \underset{:10^2}{\overset{\cdot 10^2}{\rightleftarrows}} \mathrm{dam}^2 \underset{:10^2}{\overset{\cdot 10^2}{\rightleftarrows}} \mathrm{m}^2 \underset{:10^2}{\overset{\cdot 10^2}{\rightleftarrows}} \mathrm{dm}^2 \underset{:10^2}{\overset{\cdot 10^2}{\rightleftarrows}} \mathrm{cm}^2 \underset{:10^2}{\overset{\cdot 10^2}{\rightleftarrows}} \mathrm{mm}^2$$

Rumfang

$$\mathrm{km}^3 \underset{:10^3}{\overset{\cdot 10^3}{\rightleftarrows}} \mathrm{hm}^3 \underset{:10^3}{\overset{\cdot 10^3}{\rightleftarrows}} \mathrm{dam}^3 \underset{:10^3}{\overset{\cdot 10^3}{\rightleftarrows}} \mathrm{m}^3 \underset{:10^3}{\overset{\cdot 10^3}{\rightleftarrows}} \mathrm{dm}^3 \underset{:10^3}{\overset{\cdot 10^3}{\rightleftarrows}} \mathrm{cm}^3 \underset{:10^3}{\overset{\cdot 10^3}{\rightleftarrows}} \mathrm{mm}^3$$

Husk

$dm^3=L$

$cm^3=mL$

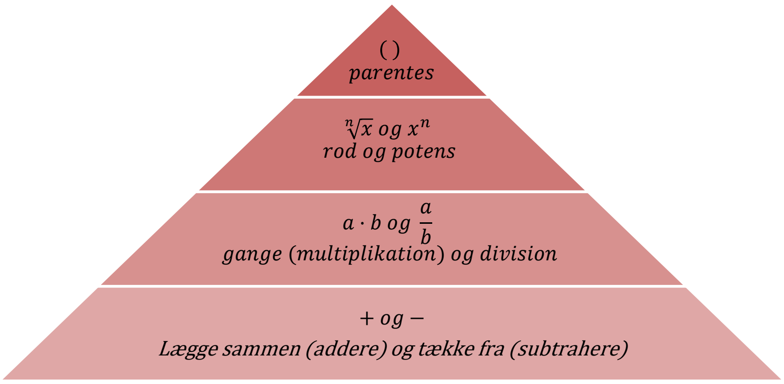
Enhedsomregning eksempel 2

Længde				
			↓Gange med 1.000←	**Kilometer (km)**
		↓Gange med 10←	**Meter (m)**	→Dividere med 1.000↑
	↓Gange med 10←	**Decimeter (dm)**	→Dividere med 10↑	
↓Gange med 10←	**Centimeter (cm)**	→Dividere med 10↑		
Millimeter (mm)	→Dividere med 10↑			
Areal				
			↓Gange med 1.000.000 (eller 1.000^2)←	**Kvadratkilometer (km^2)**
		↓Gange med 100 (eller 10^2)←	**Kvadratmeter (m^2)**	→Dividere med 1.000.000 (eller 1.000^2)↑
	↓Gange med 100 (eller 10^2)←	**Kvadratdecimeter (dm^2)**	→Dividere med 100 (eller 10^2)↑	
↓Gange med 100 (eller 10^2)←	**Kvadratcentimeter (cm^2)**	→Dividere med 100 (eller 10^2)↑		
Kvadratmillimeter (mm^2)	→Dividere med 100 (eller 10^2)↑			
Ekstra: En hektar = kvadrat med en sidelængde på 100 meter = 100 gange 100 = 10.000 m^2				
Rumfang I (Udgangspunkt i m^3)				
			↓Gange med 1.000.000.000 (eller 1.000^3)←	**Kubikkilometer (km^3)**
		↓Gange med 1.000 (eller 10^3)←	**Kubikmeter (m^3)**	→Dividere med 1.000.000.000 (eller 1.000^3)↑
	↓Gange med 1.000 (eller 10^3)←	**Kubikdecimeter (dm^3)**	→Dividere med 1.000 (eller 10^3)↑	
↓Gange med 1.000 (eller 10^3)←	**Kubikcentimeter (cm^3)**	→Dividere med 1.000 (eller 10^3)↑		
Kubikmillimeter (mm^3)	→Dividere med 1.000 (eller 10^3)↑			
Ekstra: En kubikdecimeter (dm^3) = en liter (l) En kubikcentimeter (cm^3) = en milliliter (ml)				
Rumfang II (Udgangspunkt i liter)				
			↓Gange med 100←	**Hektoliter (hl)**
		↓Gange med 10←	**Liter (l)**	→Dividere med 100↑
	↓Gange med 10←	**Deciliter (dl)**	→Dividere med 10↑	
↓Gange med 10←	**Centiliter (cl)**	→Dividere med 10↑		
Milliliter (ml)	→Dividere med 10↑			
Ekstra: En liter (l) = En kubikdecimeter (dm^3) En milliliter (ml) = kubikcentimeter (cm^3)				
Vægt				
		↓Gange med 1000←	**Tons (t)**	
	↓Gange med 1000←	**Kilogram (kg)**	→Dividere med 1000↑	
↓Gange med 1000←	**Gram (g)**	→Dividere med 1000↑		
Milligram (mg)	→Dividere med 1000↑			
Ekstra: Hvis massefylden er 1 (g/cm^3) gælder følgende: 1 tons ↔ 1 m^3 1 kg ↔ 1 dm^3 1 gram ↔ 1 cm^3 Hvis massefylden er 2 (g/cm^3)) gælder følgende: 2 tons ↔ 1 m^3 Osv.				

Tal og Algebra

Regneregler

Regnehierarkiet



Regnehierarkiet fungerer på den måde, at det øverst i pyramiden er det, som man regner først. To ”regneoperationer”, som er på samme niveau i pyramiden, regnes i læseretningen fra venstre mod højre.

Eksempel:
$8 - 6 - 4$
Her skal man først sige 8-6 og derefter trække 4 fra.

Parentesregler

Plusparentes
Dvs. at der står et plus foran parentesen.
En plusparentes kan uden videre fjernes.
Eksempel:

$$(2a + 3) + (4a + 2) = 2a + 3 + 4a + 2 = 6 \cdot a + 5$$

Minusparentes
Dvs. at der står et minus foran parentes. (Markeret med gult)
En minusparentes fjernes ved at alle led i minusparentesen skifter fortegn og minus foran parentesen er væk.
Eksempel

$$(2a + 3) - (-4a + 2) = 2a + 3 + 4a - 2 = 6 \cdot a + 1$$

Gange ind i en parentes
Gøres ved at gange ind i alle led i parentesen
Eksempel

$$2 \cdot (2a + b) = 2 \cdot 2a + 2 \cdot b = 4a + 2b$$

Division af en parentes med et tal
Gøres ved at alle led i parentesen divideres med tallet

Eksempel

$$\frac{(4a+2b)}{2} = \frac{4a}{2} + \frac{2b}{2} = 2a + b$$

Potens

a^{potens}

Potensen omtales ofte som fx "i anden" eller "i n'te", dvs. a^2eller a^n

$$a^2 = a \cdot a$$
$$a^3 = a \cdot a \cdot a$$
$$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$$

Kvadratrod

Kvadratroden vil sige at finde det tal, der ganget med sig selv giver det tal, som står under kvadratrodstegnet

$$\sqrt{4} = 2$$

Dvs. 2 gange 2, giver 4, hvilket er det tal, som står under kvadratrodstegnet

Kubikrod

Kubikroden vil siger, at finde det tal der ganget med sig selv tre gange giver det tal, som står under kubikrodstegnet

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

Dvs. 2 gange 2 gange 2 giver 8, hvilket er det tal der står under kubikrodstegnet

Sammenhæng mellem potens og rødder

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Kvadratsætninger

Kvadratet af en toleddet størrelses sum

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Udregning:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = (a\cdot a) + (a\cdot b) + (b\cdot a) + (b\cdot b) = a^2 + b^2 + 2ab$$

Kvadratet af en toleddet størrelses differens

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

Udregning:

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = (a\cdot a) + (a\cdot -b) + (-b\cdot a) + (-b\cdot -b) = a^2 + b^2 - 2ab$$

To leds sum gange de samme to leds differens

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Udregning:

$$(a+b)\cdot(a-b) = (a\cdot a) + (a\cdot -b) + (b\cdot a) + (b\cdot -b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Potens-regneregler

Et tal der ophæves i en potens x, ganges med sig selv x gange.
f.x $\mathbf{2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16}$

10^x

10^0 =	1	(Et ettal efterfuldt af 0 nuller)	
10^1 =	10	(Et ettal efterfuldt af 1 nul)	**tiere**
10^2 =	100	(Et ettal efterfuldt af 2 nuller)	**hundrede**
10^3 =	1000	(Et ettal efterfuldt af 3 nuller)	**tusinde**
10^4 =	10 000	(Et ettal efterfuldt af 4 nuller)	
10^5 =	100 000	(Et ettal efterfuldt af 5 nuller)	
10^6 =	1 000 000	(Et ettal efterfuldt af 6 nuller)	**million**
10^7 =	10 000 000	(Et ettal efterfuldt af 7 nuller)	
10^8 =	100 000 000	(Et ettal efterfuldt af 8 nuller)	
10^9 =	1000 000 000	(Et ettal efterfuldt af 9 nuller)	**milliard**

$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = 0.1$

$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0.01$

$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0.001$

$10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000} = 0.0001$

Et tal med en potens ganget med samme tal med en anden potens

$a^n \cdot a^p = a^{n+p}$

$4^4 \cdot 4^2 = 4^{4+2} = 4^6 = 4096$

Et tal med en potens divideret med samme tal med en anden potens

$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

$\frac{4^4}{4^2} = 4^{4-2} = 4^2 = 16$

Et tal opløftet i potens opløftet i potens

$(a^n)^p = a^{n \cdot p}$

$(2^4)^2 = 2^{4 \cdot 2} = 2^8 = 256$

Et tal opløftet i potens divideret med et andet tal opløftet med samme potens.

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

$\left(\frac{2}{4}\right)^3 = \frac{2^3}{4^3} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

Et tal opløftet i en negativ potens

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Kvadratrod er en potens

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

$\sqrt[4]{16} = 16^{\frac{1}{4}} = 2$ OBS: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

$\sqrt[r]{a^p} = (a^p)^{\frac{1}{r}} = a^{\frac{p \cdot 1}{r}} = a^{\frac{p}{r}}$

$\sqrt[4]{4^2} = (4^2)^{\frac{1}{4}} = 4^{\frac{2 \cdot 1}{4}} = 4^{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2$

Brøker

En brøk:

- består af en TÆLLER (Toppen) og NÆVNER (Nederst). Både tæller og nævner skal være et helt tal, hvis brøken skal været et rationelt tal. Nævnerne kan aldrig være 0.

$$\frac{a}{b}=\frac{tæller}{nævner}$$

Addere to brøker (+)

Kræver at man finder fællesnævner, et tal som begge nævnere går op i.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{c\cdot b}{b\cdot d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}$$

Eksempel:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{1\cdot\mathbf{3}}{2\cdot\mathbf{3}}+\frac{\mathbf{2}\cdot 2}{\mathbf{2}\cdot 3}=\frac{1\cdot 3+2\cdot 2}{\mathbf{2}\cdot\mathbf{3}}=\frac{3+4}{6}=\frac{7}{6}$$

- Jeg starter med at forlænge begge brøker med modsatte brøks nævner - husk når man forlænger en brøk, skal man gange med det samme tal i tæller og nævner.
- Når to brøker har samme nævner og skal adderes, må man addere tællerne og lade nævneren stå.

Subtrahere to brøker (-):

Kræver at man finder fællesnævner, et tal som begge nævnere går op i.

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}-\frac{c\cdot b}{b\cdot d}=\frac{a\cdot d-c\cdot b}{b\cdot d}$$

Eksempel:

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{1\cdot\mathbf{3}}{2\cdot\mathbf{3}}-\frac{\mathbf{2}\cdot 2}{\mathbf{2}\cdot 3}=\frac{1\cdot 3-2\cdot 2}{\mathbf{2}\cdot\mathbf{3}}=\frac{3-4}{6}=-\frac{1}{6}$$

- Jeg starter med at forlænge begge brøker med modsatte brøks nævner - husk når man forlænger en brøk skal man gange med det samme tal i tæller og nævner.
- Når to brøker har samme nævner og skal trækkes fra hinanden, trækker man tællerne fra hinanden og lader nævneren stå

Gange brøk med heltal

Man ganger en brøk med et heltal ved at gange heltallet med tælleren. Det er lige meget om man skal gange en brøk med et heltal eller gange et heltal med en brøk.

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$$

Eksempel:

$$3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 1}{4} = \frac{3}{4}$$

- Jeg med at gange 3 med 1, dvs. 3 er tælleren
- Nævneren beholder jeg - her 4
- Og til sidst forkorter jeg brøken, hvis det er muligt

Gange to brøker med hinanden

Man ganger to brøker med hinanden ved at gange tæller med tæller og nævner med nævner.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$$

2 eksempler

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 5} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Om muligt forkorter man brøken - dvs. her divideres med det samme tal i tæller og nævner - her er det ”2”i begge eksempler.

Division og brøker

Videoforklaring til hvordan man dividerer med brøker:
https://youtu.be/AnpqHXiQE0U

Dividere to brøker med hinanden:

Man dividerer med en brøk ved at gange med den omvendte

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{ad}{bc}$$

Eksempel:

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$$

1. Jeg starter med at skrive den første brøk normalt og så gange med den anden brøk vendt om (hvor tæller er blevet til nævner og nævner er blevet til tæller)
2. Så ganger jeg tæller med tæller og nævner med nævner
3. Om muligt forkorter jeg brøken - dvs. dividerer med det samme tal i tæller og nævner

Division af brøk med heltal

Man dividerer en brøk med et heltal ved enten at dividere tælleren med heltallet (ofte hvor heltallet går op i tælleren)

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a : c}{b}$$

Eksempel

$$\frac{2}{8} : 2 = \frac{2 : 2}{8} = \frac{1}{8}$$

Eller gange i nævneren (ofte hvor heltallet ikke går op i tælleren)

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$$

$$\frac{3}{8} : 2 = \frac{3}{8 \cdot 2} = \frac{3}{16}$$

Division af heltal med en brøk

Man divider et heltal med en brøk ved at gange med den omvendte brøk

$$a:\frac{b}{c}=a\cdot\frac{c}{b}=\frac{a\cdot c}{b}$$

Eksempel:

$$2:\frac{3}{8}=2\cdot\frac{8}{3}=\frac{2\cdot 8}{3}=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3}$$

Fakultet "!"

Bruges primært, når man arbejder med kombinatorik

$$a!=a\cdot(a-1)\cdot(a-2)\cdot\ldots\cdot 1$$

Eksempel

$$10!=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=3628800$$
$$5!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$$

$$\frac{10!}{5!}=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6$$

Reducering

At reducere vil sige at forenkle et udtryk så meget som muligt.
Når du skal reducere skal du huske at bruge reglerne i regneartеrnes hierarki.
Eksempel på reducering:

$$a+b+5a+b-2a-6b+2a+b=6\cdot a-3\cdot b$$

Eksempel på reducering hvor det er vigtigt du husker regneartеrnes hierarki:

$$\frac{a+a\cdot 2\cdot(2a+2a)}{2a}=\frac{a+2a\cdot(4a)}{2a}=\frac{a+8a^2}{2a}=\frac{a}{2a}+\frac{8a^2}{2a}=0{,}5+4a$$

Procent

Hvad er procent

% betyder hundrededele dvs. 5% = 0,05 = $\frac{5}{100}$

Finde en procentdel af et tal?

Hvor meget er 5% af 50: $5\% \cdot 50 = 2{,}5$ eller $\frac{5}{100} \cdot 50 = 2{,}5$

Finde et tal efter en procentdel er lagt til?

$$\text{startværdi} \cdot (100\% + x\%) = \text{slutværdi}$$

Eksempel: Læg 25% til 200

$$200 \cdot (100\% + 25\%) = 250$$

eller

$$200 \cdot (1 + 0{,}25) = 250$$

Finde et tal efter en procentdel er trukket fra?

$$\text{startværdi} \cdot (100\% - x\%) = \text{slutværdi}$$

Eksempel: Træk 20% fra 250

$$250 \cdot (100\% - 20\%) = 200$$

eller

$$250 \cdot (1 - 0{,}2) = 200$$

Hvor mange % udgør en del af noget?

$$\frac{del}{noget} = del\ i\ \%$$

Eksempel: Hvor meget er 10 ud af 100?

$$\frac{10}{100} = 0{,}1 = 10\%$$

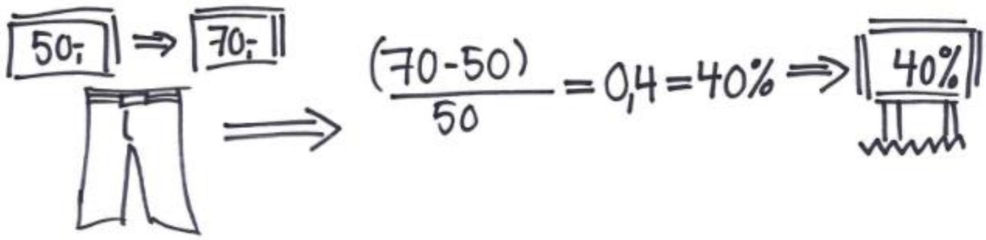
OBS:
Det betragtes som forkert at skrive $\frac{10}{100} \cdot 100 = 10\%$, da $\frac{10}{100} \cdot 100 = 10$ og $10\% = 0{,}1$
$10 = 0{,}1$ er ikke sandt. Ligmed-tegnet "=" betyder netop at begge sider af lighedstegnet er lige stort.

Stigning i procent

$$\frac{stigning}{startværdi} = stigning\ i\ \%$$

Eksempel: Et par bukser er steget fra 50 til 70 kr. Hvor meget er buksernes pris steget i procent?

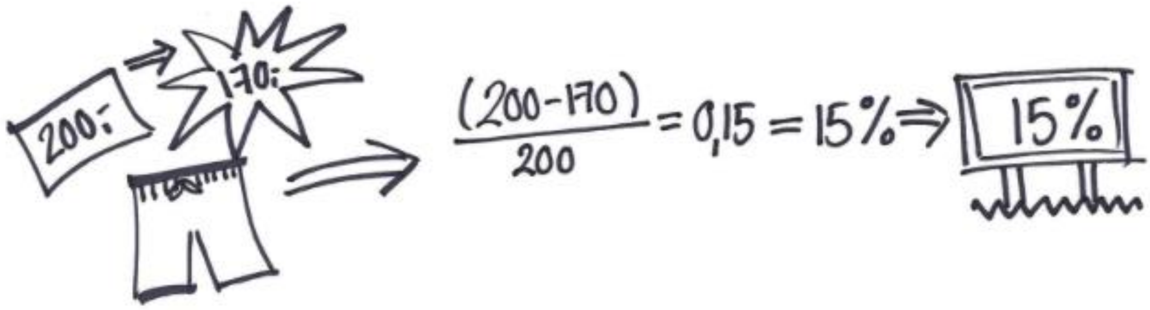
$$\frac{70-50}{50} = 0{,}4 = 40\%$$



Fald i procent

$$\frac{fald}{startværdi} = fald\ i\ \%$$

Eks. Et par shorts er faldet fra 200 til 170 kr. Hvor meget er shortsenes pris faldet i procent?



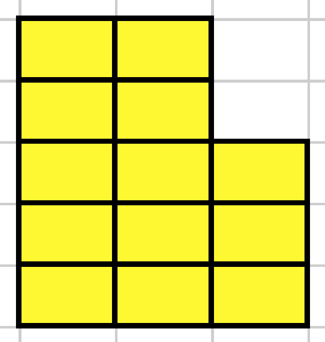
$$\frac{200-170}{200} = 0{,}15 = 15\%$$

Finde hele tallet ud fra en procentdel

13% af tallet er 260. Hvad er hele tallet?

13% = 260

$1\% = \frac{260}{13} = 20$



20	20	
20	20	
20	20	20
20	20	20
20	20	20

$100\% = 20 \cdot 100 = 2000$

20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
20	20	20	20	20	20	20	20	20	20

$$\frac{260}{13} \cdot 100 = 2000$$

Eller løs vha. WordMat og ligningsløsning

$$x \cdot 13\% = 260$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 2000$$

Finde det oprindelige tal når man kender tallet efter procentdelen er lagt til

Generel formel:

$$\text{det}\ oprindelige\ tal = \frac{tallet\ \text{det}\ er\ steget\ til}{100\% + stigningsprocenten}$$

Eksempel:
Et tal er steget med 20% til 150.
Hvad var det oprindelige tal?
Dvs. det oprindelige tal er de 100%, så lægges de 20% oveni og det skal så svare til 150.

Eksempel på beregning vha. den blå formel:

$$\frac{150}{100\% + 20\%} = 125$$

Metode vha. WordMat

$$x + x \cdot 20\% = 150$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMatMac.*

$$x = 125$$

Indextal

$$\boldsymbol{indekstal} = \frac{\boldsymbol{værdi\ i\ aktuelt}\ \text{år}}{\boldsymbol{værdi\ basis}\ \text{år}} \cdot 100$$

Eksempel
Thildes lommepenge

Årstal	2008	2010	2014	2018
Årlig lommepenge	240	480	2400	4000,00
Indekstal	100	200	1000	1666,67

Basis år er 2008

Indekstal for år 2010 $\frac{480}{240} \cdot 100 \ = 200$

Indekstal for år 2014: $\frac{2400}{240} \cdot 100 \ = 1000$

Indextal for år 2018: $\frac{4000}{240} \cdot 100 \approx 1666{,}67$

Ligninger

Når man løser ligninger, handler det i bund og grund om at finde den ukendte værdi, som kan sættes ind på x'ets plads, således at der er "balance" mellem højre og venstre side af lig med.

Regler:

- Du må lægge det samme tal til på begge sider af lig med
- Du må trække det samme tal fra på begge sider af lig med
- Du må gange med det samme tal på begge sider af lig med (Dog må tallet ikke være 0)
- Du må dividere med det samme tal på begge sider af lig med (Dog må tallet ikke være 0)
- (Du må sætte i samme potens på begge sider af lig med)
- (Du må tage den samme rod på begge sider af lig med)

HUSK: Hvis du ganger eller dividere, er det alle led, som skal ganges eller divideres!

HUSK: Hvis du er usikker, kan du sætte hele udtrykket i parentes, inden du lægger til, trækker fra, ganger eller dividerer!

Eksempel 1

$3 + x = 9$	Vi vil gerne have "x'er" samlet på den ene side og tallene på den anden side af lig med. Man siger, at man "isolerer x". Derfor vil vi gerne fjerne de "3" på venstre side af lig med. Det gør vi ved at trækker 3 fra på begge sider
$3 + x - 3 = 9 - 3$	Ved at reducere ligningen kommer vi frem til, at x=6.
$x = 6$	Så det betyder, at løsningen på ligningen er tallet 6. 6 er altså det tal, som vi kan sætte ind på x'ets plads, så der er "balance" i ligningen.

Eksempel 2

$2x + 5 = 9$	Vi skal have x'erne isoleret.
$(2x + 5) - 5 = 9 - 5$	Ved at reducere ligningen kommer vi frem til, at 2x=4
$2x = 4$	Når vi ved, at 2 x er lig med 4, så kan vi finde ud af, hvad 1x er, ved at dividere med 2 på begge sider af lig med.
$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$	Når vi har lavet divisionen, kommer vi frem til, at x=2
$2 = x$	Så løsningen på ligningen er at x skal være 2

Eksempel 3

$2(4x-3)=4-(2x-8)$	Vi ganger ind i parentesen og ophæver minusparentesen.
$8x-6=4-2x+8$	Når reducerer og kommer frem til at 10x=20
$10x=18$	Vi divider med 10 på begge sider af lig med
$x=1{,}8$	Løsningen er at x skal være 1,8

Uligheder

De fleste regler for løsning af ligninger gælder også for løsning af uligheder.

Det vil sige, at man må…

- Gange
- Dividere
- Lægge til
- Trække fra

…med det samme tal på begge sider (dog ikke 0).

DOG skal man være opmærksom på, at:

- Hvis man ganger eller dividerer med et negativt tal, så ”vender man uligheden”.
  - Så ”>” bliver til ”<” og ”<” bliver til ”>”
    - Eks: ”5<x” bliver til ”-5>-x” når man ganger med ”-1”
- Man ikke kan bytte om på højre og venstre side på samme måde som ved ligninger.
  - Eks. er ”x=5” det samme som ”5=x”. **MEN** ”x<5” er **IKKE** det samme som ”5<x”
- Ofte er løsningen af en ulighed en gruppe af tal.
  - Derfor kan man ofte angive løsningen i et interval.
    - Eks: løsningen til ”5<x” er]5; ∞[

Eks: løsningen til ”5≤x” er [5; ∞[

Moms

MOMS = meromsætningsskat
En afgift, som butikkerne betaler til skat for de varer, som butikken sælger.
Hvis en butiksindehaver gerne vil have 100 kr. for en vare, er han nødt til at sælge den for 125 kr., da SKAT skal have 25% i moms.

Når momsen skal lægges til

Vare	Vare	Vare	Vare	Moms	=	Varens pris med moms
100%				25%	=	125%

Eksempel hvor momsen skal lægges til:
Per have 150 kr. for en vare. Når han skal sælge den, er han derfor nødt til at lægge 25% oveni, for at finde den pris, som han skal sælge varen for.

$$150 + 150 \cdot 25\% = 187{,}5$$
Eller
$$150 \cdot (1 + 0{,}25) = 187{,}5$$

Når momsen skal trækkes fra

Vare	Vare	Vare	Vare	Moms	=	Varens pris Med moms
20%	20%	20%	20%	20%	=	100%

Som man kan se på tegningen, så hvis man man sætter varens pris med moms til 100%, så udgør momsen 20%

Eksempel hvor momsen trækkes fra:
I en butik hænger en bluse til 200 kr.
Hvor meget er prisen uden moms?

$$200 - 200 \cdot 20\% = 160$$
Eller
$$200 \cdot (1 - 0{,}2) = 160$$
Eller
$$\frac{200}{(1 + 0{,}25)} = 160$$

Anden moms: Tyskmoms

I andre lande f.eks. Tyskland er der andre satser for moms. Hvis f.eks. satsen for moms er 19%, kan man lægge momsen til ved at gange med 1,19 (1 + 19%). Man kan trække momsen ud af et beløb ved at dividere med 1,19. På samme måde kan man lægge momsen til et dansk beløb ved at gange med 1,25 og man kan trække det ud ved at dividere med 1,25.

Valuta

Når man skal omregne fra en valuta til en anden skal man forholde sig til kurser.

EUR 759,38 betyder at du skal betale 759,38 DKR for at få 100 EUR fordi det er i Danmark du kigger på kurser.

Omregning fra fremmed valuta til dansk valuta

$$Pris\ i\ danske\ kr. = Pris\ i\ fremmed\ valuta \cdot \frac{kursen}{100}$$

Eksempel:

Du finder et fjernsyn i Tyskland. Du gerne vil købe fjernsynet og det koster 325 EUR. Hvor mange DKK er det?

$$325 \cdot \frac{759{,}38}{100} = 2467{,}985$$

Dvs. det koster 2467,99 DKK.

Omregning fra dansk valuta til fremmed valuta:

$$Pris\ i\ fremmed\ valuta = \frac{Pris\ i\ DKK}{\frac{kurs}{100}}$$

Eller

$$Pris\ i\ fremmed\ valuta = \frac{Pris\ i\ DKK \cdot 100}{kurs}$$

Du arbejder i en is butik og sælger isvafler til 15 kr.

En tysker kommer og spørger hvad isen koster i euro.

$$\frac{15}{\frac{759{,}38}{100}} = 1{,}975296$$

Eller

$$\frac{15 \cdot 100}{759{,}38} \approx 1{,}975296$$

Dvs. isen koster 1,98 EUR.

Finde kursen når du kende prisen i danske kr og fremmed valuta:

$$kursen = \frac{Pris\ i\ DK}{Pris\ i\ fremmed\ valuta} \cdot 100$$

I en grænse butik kan du købe flødeboller for 15,25 dkr eller 2 euro, hvad er kursen?

$$kursen = \frac{15{,}25}{2} \cdot 100 = 762{,}5$$

Bevisførelse

Modbevis

Når man skal bevise noget, skal man ofte bevise det med algebra eller lave et modbevis med et regnestykke.

Et modbevis er, når man kan konkludere ved et regnestykke og/eller algebra at hypotesen ikke holder.

Eksempel på modbevis

Bevis at når man fordobler enten radius eller en højde i en cylinder, vil man rumfanget stadig være det samme.

Vi siger at højden er 10 og radius er 2.

$$\pi \cdot 2^2 \cdot 10 \approx 125{,}6637$$

Vi fordobler højden: $\pi \cdot 2^2 \cdot 20 \approx 251{,}3274$

Vi fordobler radius: $\pi \cdot 4^2 \cdot 10 \approx 502{,}6548$

De 2 resultater er ikke ens, med det oprindelige regnestykke vi startede med (125,6637). Vi har dermed bevist ved hjælp af et modbevis, at hypotesen ikke er rigtig.

Nogen gange er nok at et regnestykke/flere regnestykker passer på hypotesen

Hypotese:
Et rektangels areal vil altid vokse hvis man gør omkredsen større:

Bevis om hypotesen er sand:

Beregning.
Vi har fx. et rektangel med siderne 4 og 3
Omkreds: $2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 14$
Areal: $4 \cdot 3 = 12$

Vi gør siderne lidt større og vælger sidelængerne 5 og 4 og har nu en omkreds på 18.
Areal: $4 \cdot 5 = 20$

Vi kan se at hypotesen passer i dette tilfælde, men gælder det nu i alle tilfælde.
Vi prøver med et nyt forsøg
Side længder 6 og 5, med en omkreds på 22.
Areal: $6 \cdot 5 = 30$

Det passer stadig på hypotesen, MEN
Jeg bruger nu sidelængden 20 og 1, det vier en omkreds på 42.
Areal: $20 \cdot 1 = 20$
Her kan vi så se, at det ikke passer. Man skal derfor passe på med at konkludere på noget, der baserer sig på et eller flere regnestykker.

Kan man ikke finde noget modbevis med tal, så skal man bevise med bogstaver.

Bogstavsbevis

Hypotese:
Når man fordobler begge sider i et rektangel vil arealet altid være 4 gange så stort.

Tager udgangspunkt i et rektangel med siderne 4 og 3
Areal: $4 \cdot 3 = 12$
Fordobler siderne: $8 \cdot 6 = 48, \frac{48}{12} = 4$
Her passer det, men jeg kan ikke være sikker.

Med algebra

$$a \cdot b \cdot 4 = 2 \cdot a \cdot 2 \cdot b$$

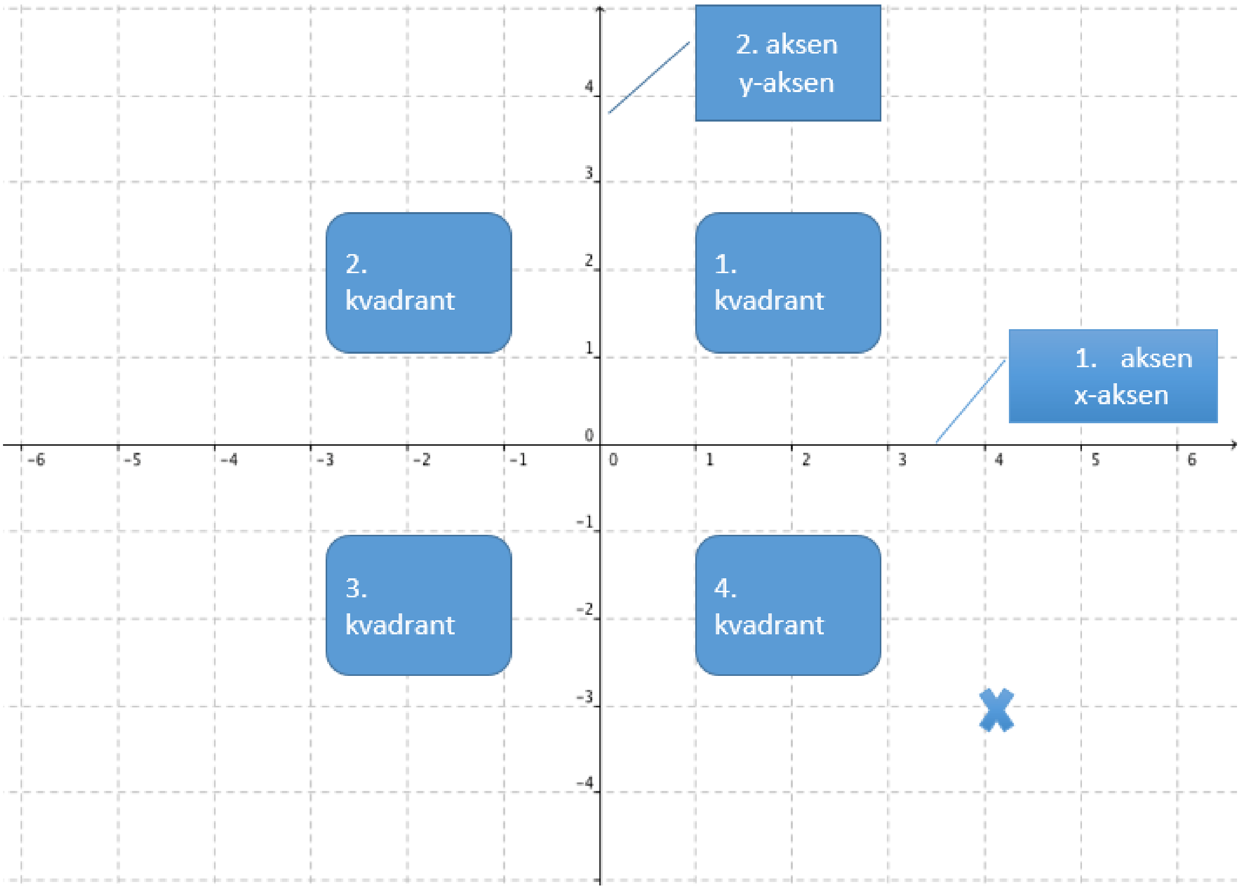
Reducerer:

$$a \cdot b \cdot 4 = a \cdot b \cdot 4$$

Her er der overensstemmelse og dermed bevist

Funktioner

Koordinatsystemet



Et koordinatsæt angives (x,y)

Eksempel

Krydset har koordinatsættet
(x,y) = (4,-3).

1. gradsfunktioner (lineær)

De fire repræsentationsformer af en 1. gradsfunktion

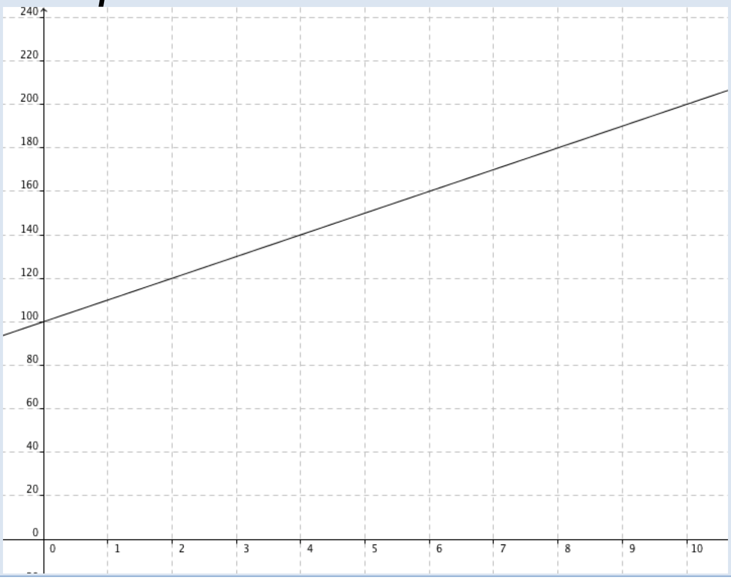
Funktionsforskrift

$f(x) = 10x+100$

Tabel "Sildeben"

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	80	90	100	110	120	130

Graf



Tekst

Erik spare **hver uge 10 kr.** op.

Da han **starter** med at føre regnskab over pengene, har han **100 kr**.

Hvordan vil udviklingen se ud på hans bankkonto

a og b's betydning

HÆLDNINGEN (a)

a positiv → grafen stiger fra venstre mod højre

a = 0 → grafen vil være vandret

a negativ → grafen falder fra venstre mod højre

Jo større a-værdi, jo kraftigere hældning

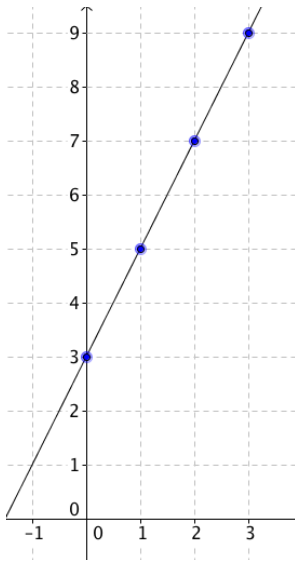
SKÆRING MED Y-AKSEN (b)

b bestemmer, hvor grafen skærer y-aksen.

Tegn grafen

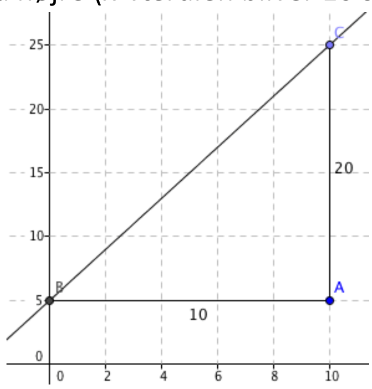
f(x)=2x+3.

Start i (0,b) her (0,3). Herfra bevæger du dig 1 enhed til højre (1 ud af x-aksen) og a enheder op (eller ned hvis a er negativ). I dette tilfælde er a = 2 så vi skal 1 enhed ud af x-aksen mod højre og 2 enheder op. Sådan fortsætter du til du har punkter nok til at lave en linje.



Find funktionsforskriften

Hvis man kigger på hældningen, kan man se, at grafen nedenfor stiger 20 enheder (y-værdien), hver gang men går 10 enheder mod højre (x-værdien bliver 10 større).



Derfor vil a-værdien her være 20/10=2.

Samtidig kan man se, at grafen skærer y-aksen i 5. Derfor vil vores b-værdi blive 5.

Når vi sætter det ind i vores generelle forskrift f(x)=ax+b kommer vores funktion til at hedde:

f(x)=2x+5

Beregne sig frem til skæringspunktet

Sæt de to funktioner lig hinanden, f(x) = g(x)

f(x) = 2x - 9 og g(x) = -x + 6

Når f(x) = g(x) så må det også være sådan at::

2x - 9= -x + 6

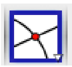
Ved at løse ligningen, finder vi ud af, at x = 5

Nu kan vi så tage vores x-værdi og sætte ind i en af de to funktioner

Når x = 5 så sættes 5 ind på x'ets plads i f(x)=2x-9 det bliver til $f(5) = 2 \cdot 5 - 9 = 1$
Sætter vi den ind i g(x)=-x+6 bliver det til $g(x) = -1 \cdot 5 + 6 = 1$
Hvis ikke det giver det samme, så har man lavet en fejl

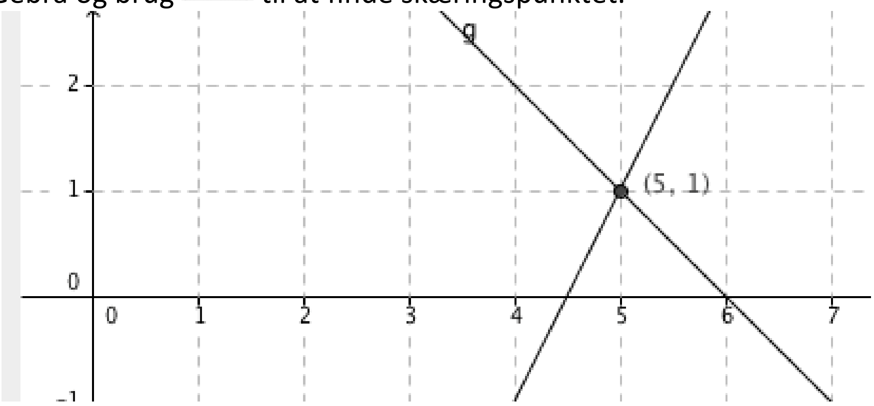
De to grafer skære altså hinanden i koordinatet (x,y) = (5,1)

Tegne sig frem til skæringspunktet

Sæt begge funktioner ind i GeoGebra og brug  til at finde skæringspunktet.

Funktion
- $f(x) = 2x - 9$
- $g(x) = -x + 6$

Punkt
- A = (5, 1)



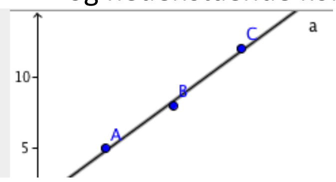
Fitlinje

Bruges til at finde den bedst tilnærmede linje ud fra de givne punkter.
Indsæt A(1,5) og B(2,8) og C(3,12) i GeoGebra.

Skriv **FitLinje[A,B,C]** og nedenstående kommer frem.

Linje
- a: y = 3.5x + 1.33

Punkt
- A = (1, 5)
- B = (2, 8)
- C = (3, 12)

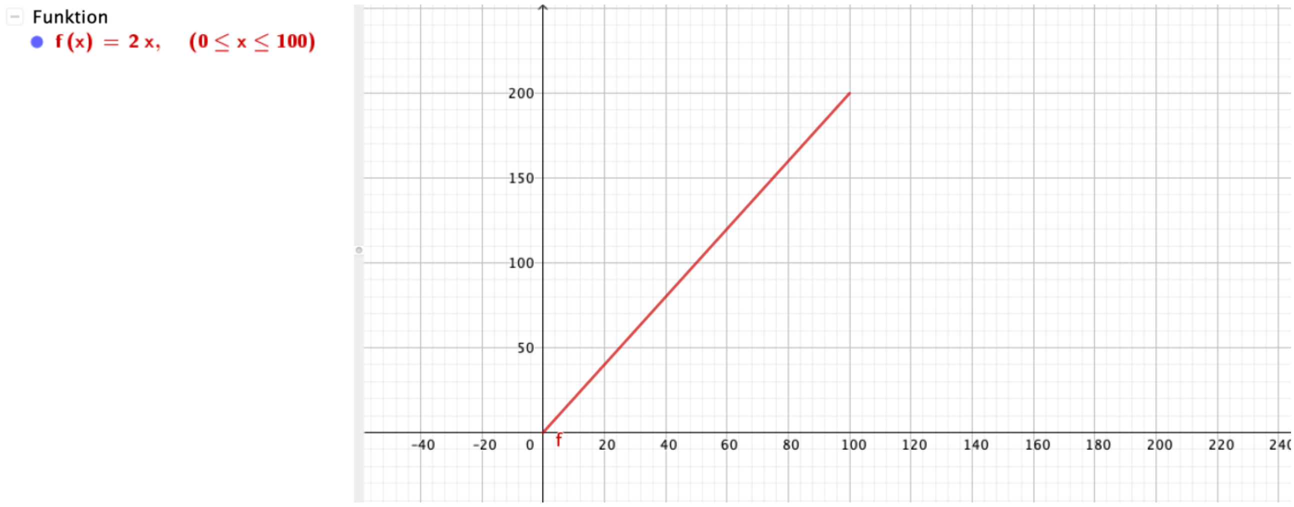


Her kan du aflæse den bedst mulige rette linje gennem punkterne. Det giver en linje med forskriften f(x)=3,5x+1,33

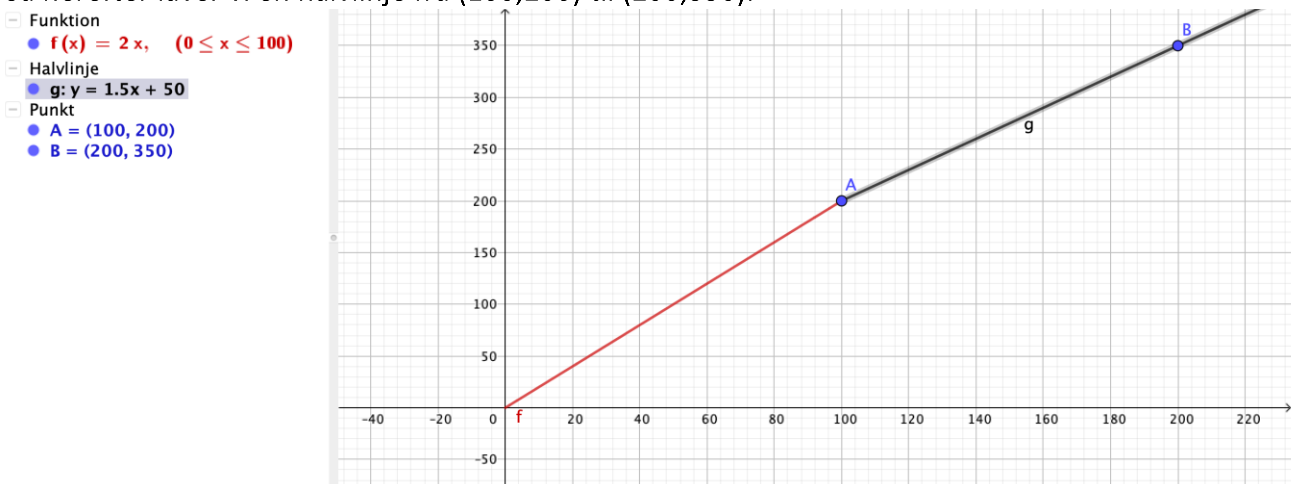
Stykkevis lineære funktioner i GeoGebra

Det koster 2 kr. pr. km de første 100 km og derefter falder prisen til 1,5 kr. pr. km.
I inputlinjen skrives funktion og man vælger denne

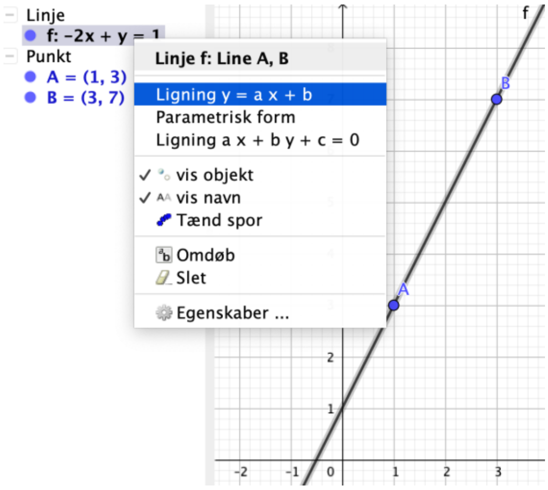
Funktion[<Funktion>, <Start x-Værdi>, <Slut x-Værdi>] . Den udfyldes sådan Input: Funktion[2x, 0, 100]



Derefter indsætter man 2 punkter. Første punkt ved (100,200), som er der, hvor funktionen skifter hældning.
Næste punkt sættes ved fx 200 km, det koster 200 kr (for de første 100km) + 1,5 *100 kr (for de næste 100km) =350 kr. Så punktet hedder (200,350)
Så herefter laver vi en halvlinje fra (100,200) til (200,350).



Find funktionsforskrift ud fra 2 punkter



Vi kender 2 punkter (1,3) og (3,7).
Sæt de to punkter ind i GeoGebra.
Lav en linje gennem punkterne.

Så kommer dette frem a: −2x + y = 1

Højre klik på udtrykket a: −2x + y = 1

og vælg Ligning y = a x + b

Så har du forskriften y=2x+1.

Beregn funktionsforskriften ud fra 2 punkter

Eks. Vi har punkterne (2,11) og (3,15)

Vi kalder punktet (2,11) for punkt **1**.
X-koordinaten (her 2) kalder vi for $\mathbf{x_1}$ og y-koordinaten (her 11) kalder vi for $\mathbf{y_1}$

Vi kalder punktet (3,15) for punkt **2**.
X-koordinaten (her 3) kalder vi for $\mathbf{x_2}$ og y-koordinaten (her 15) kalder vi for $\mathbf{y_2}$

(Det er i denne sammenhæng ligegyldigt, hvilket punkt vi vælger som punkt 1 og punkt 2.)

For at finde hældningen **a** skal vi bruge følgende formel:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

For at finde skæringspunktet med y-aksen **b**, skal vi bruge en af disse to formler.
$b = y_2 - x_2 \cdot a$ eller $b = y_1 - x_1 \cdot a$
(Det er lige meget, hvilken en af de 2 formler vi bruger.)

Nå vi sætter vores to punkter ind i formlerne, får vi følgende resultat

$$a = \frac{15 - 11}{3 - 2} = 4$$
$$b = 15 - 3 \cdot 4 = 3$$

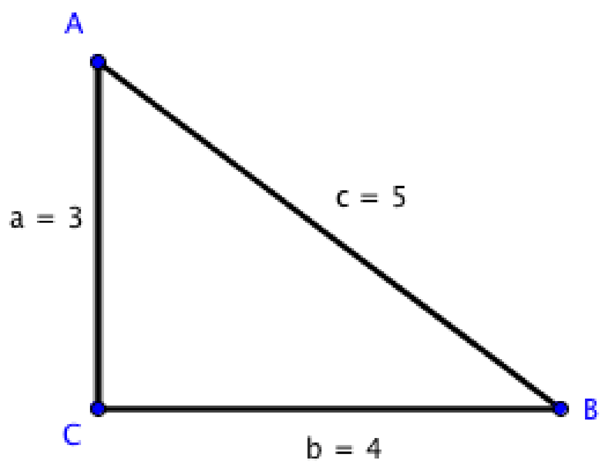
Det vil sige at funktionsforskriften for den rette linje, som går gennem punkterne (2,11) og (3,15), er: f(x)=4x+3

P.E.T. → Pythagoras, Ensvinklede trekanter og Trigonometri

Pythagoras-sætning

Er en sætning, der kan bruges til at finde en manglende side på en retvinklet trekant.

$$a^2 + b^2 = c^2$$



$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a = \sqrt{c^2 - b^2} \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Eksempel (kender de to kateter):
Vi kender de to kateter (de korteste sider, side a og side b) og vil gerne finde hypotenusen (den længste side, side c).

$$c = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

Ligningen løses for c vha. CAS-værktøjet WordMatMac.

$$c = 5$$

Eller

$$c^2 = 3^2 + 4^2$$

Ligningen løses for c vha. CAS-værktøjet WordMatMac.

$$c = -5 \quad \vee \quad c = 5$$

Da c ikke kan være negativ, kan vi kun bruge løsningen c=5

Eksempel (kender en katete og hypotenusen):
Vi kender side a = 3 og siden c = 5.

$$b = \sqrt{5^2 - 3^2}$$

Ligningen løses for c vha. CAS-værktøjet WordMatMac.

$$b = 4$$

Eller

$$5^2 = 3^2 + b^2$$

Ligningen løses for b vha. CAS-værktøjet WordMatMac.

$$b = -4 \quad \vee \quad b = 4$$

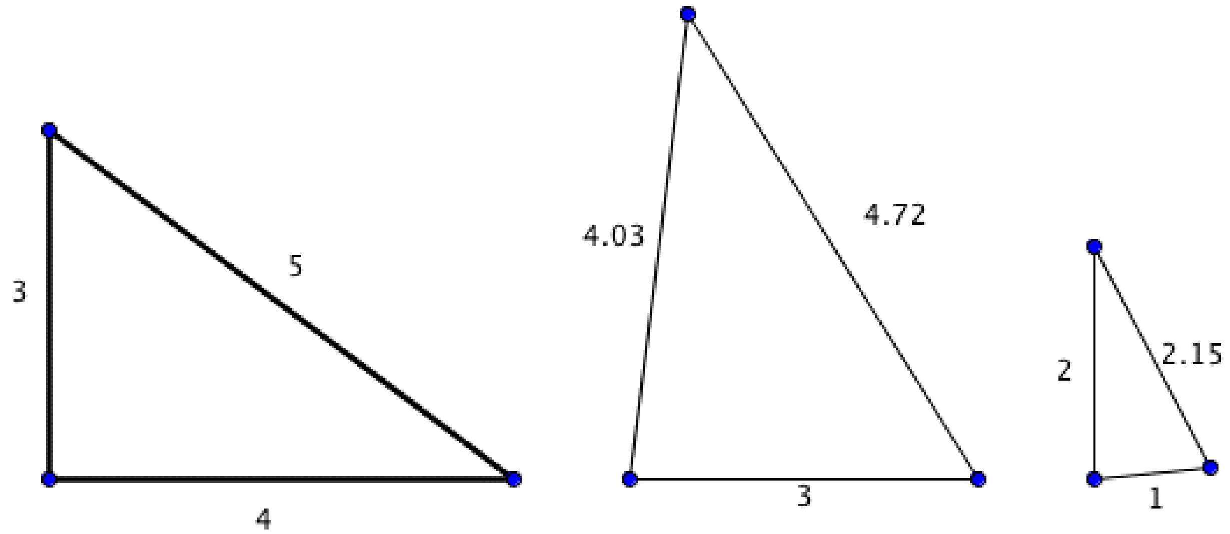
Da b ikke kan være negativ, kan vi kun bruge løsningen c=5

Den omvendte Pythagoras

Pythagoras-sætning kan bruges til at tjekke, om en trekant er retvinklet. Det kræver, at man kender alle sidelængder.

Hvis sidelængderne i en trekant passer med; $a^2 + b^2 = c^2$, så ved vi at trekanten er retvinklet.

Skitser af trekanter



Eksempel på beregningen:

Trekant 1:

$$3^2 + 4^2 = 25$$
$$5^2 = 25$$

Da både højre og venstre side af pythagoras-sætning (a^2+b^2 = c^2) giver 25, så ved vi, at pythagoras-sætning passer på trekant 1. Det betyder at trekant 1 er retvinklet

Trekant 2:

$$3^2 + 4{,}03^2 = 25{,}2409$$
$$4{,}72^2 = 22{,}2784$$

Da a^2+b^2 her ikke er det samme som c^2, betyder det, at trekant 2 IKKE er retvinklet

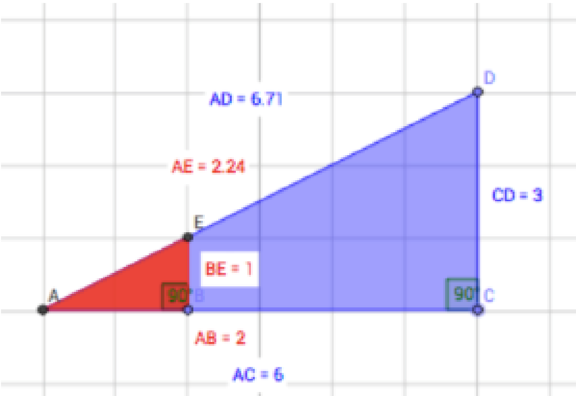
Trekant 3:

$$2^2 + 1^2 = 5$$
$$2{,}15^2 = 4{,}6225$$

Da a^2+b^2 ikke er det samme som c^2, betyder det, at trekant 3 IKKE er retvinklet

Ensvinklede trekanter

Forholdet mellem ensliggende sider i ensvinklede trekanter er konstant, dvs. det samme.

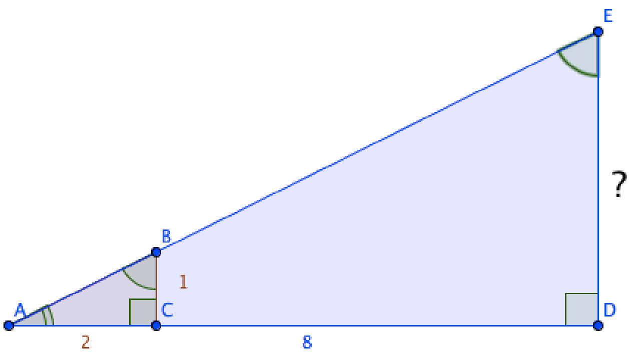


$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\frac{|CD|}{|BE|} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\frac{|AD|}{|AE|} = \frac{6{,}71}{2{,}24} = 2{,}996 \approx 3$$

$$Dvs.\ forholdet\ mellem\ de\ ensliggende\ sider\ er\ 3$$



Da trekanter er ensvinklede, kan jeg finde længden af IEDI
Først finder jeg forholdet mellem siden |AC| og |AD|

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{8}{2} = 4$$

Nu kan jeg så finde |ED| ved at tage |BC| og gange med 4

$$|BC| \cdot 4 = 1 \cdot 4 = 4$$

Dvs. IEDI er 4 høj

Ligedannede og kongruente figurer

Ligedannede figurer

To figurer er ligedannede, hvis den ene figur er enten en forstørrelse eller en kopi af den anden figur. De to figurer må gerne være drejet eller spejlet i forhold til hinanden.

To trekanter er **ligedannede** hvis:

- mindst 2 af vinklerne i de to trekanter er parvis lige store.

Eller

- alle 3 sidelængder i den ene trekant har parvis samme forhold til alle 3 sidelængder i den anden trekant.

Kongruent figurer

To figurer er kongruente, hvis den ene figur er en kopi af den anden figur. De to figurer må gerne være drejet eller spejlet i forhold til hinanden.

To trekanter er **kongruente** hvis:

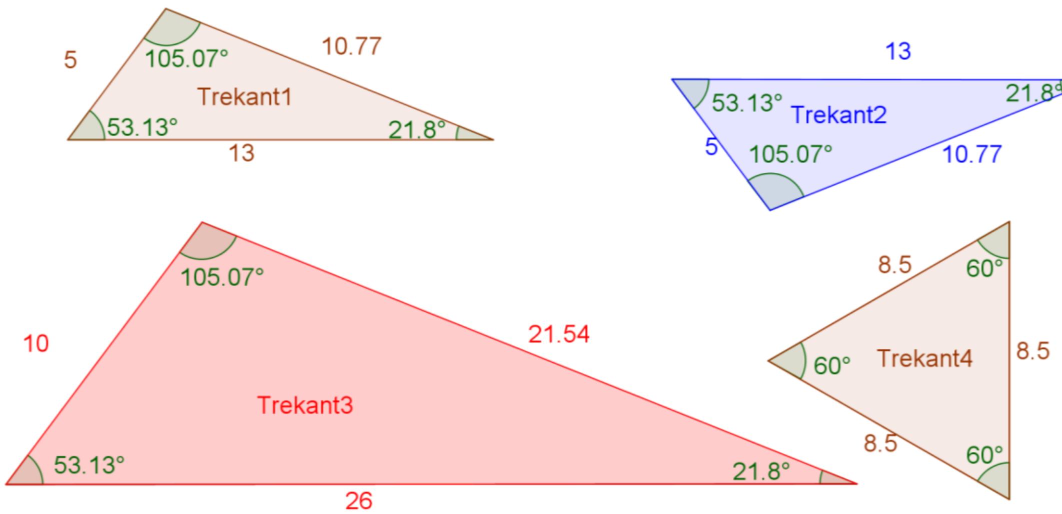
- siderne parvis er lige store
- 2 sider er parvis lige store og den mellemliggende vinkel er lige store.
- en side og de hosliggende vinkler parvis er lige store.

Eksempler:

Trekant 1 og 2 er **kongruente**

Trekant 1, 2 og 3 er **ligedannede**

Trekant 4 er hverken ligedannet eller kongruent med de øvrige 3 trekanter.



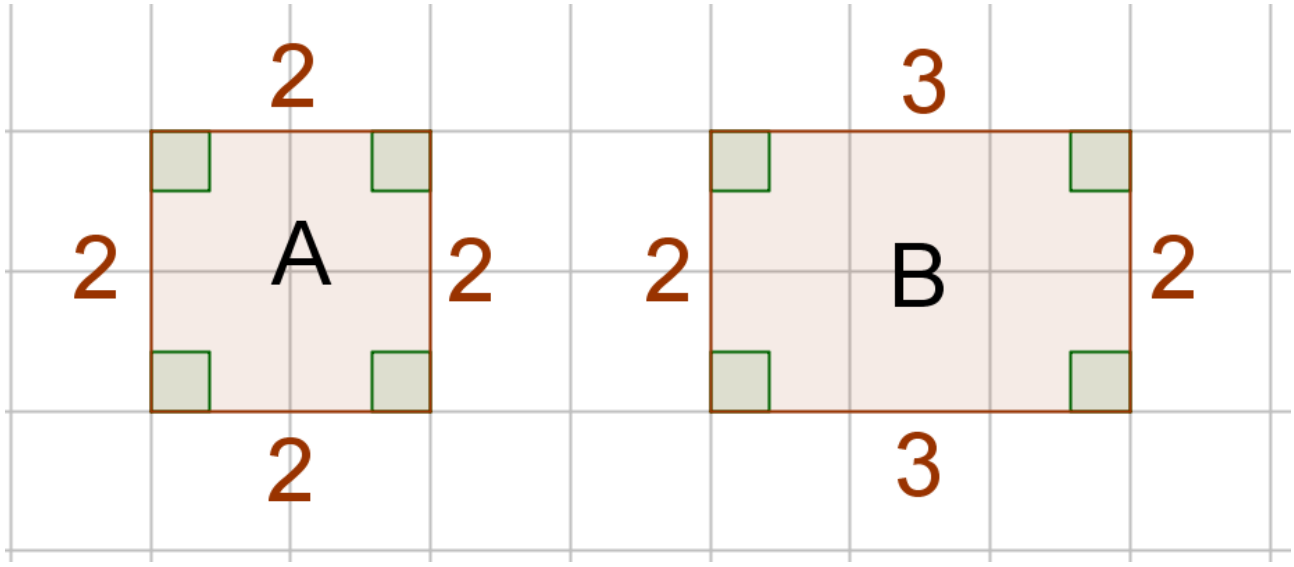
Ligedannede og ensvinklede figurer

Hvis en figur er ligedannet, så er den også ensvinklet. **Men** en figur kan godt være ensvinklet uden at være ligedannet.

Alle trekanter, som er ensvinklede, er også ligedannede.

Mens f.eks. firkanter ikke altid er ligedannede, når de er ens vinklede.

Eks. er kvadratet A og rektanglet B ensvinklede, men ikke ligedannede.

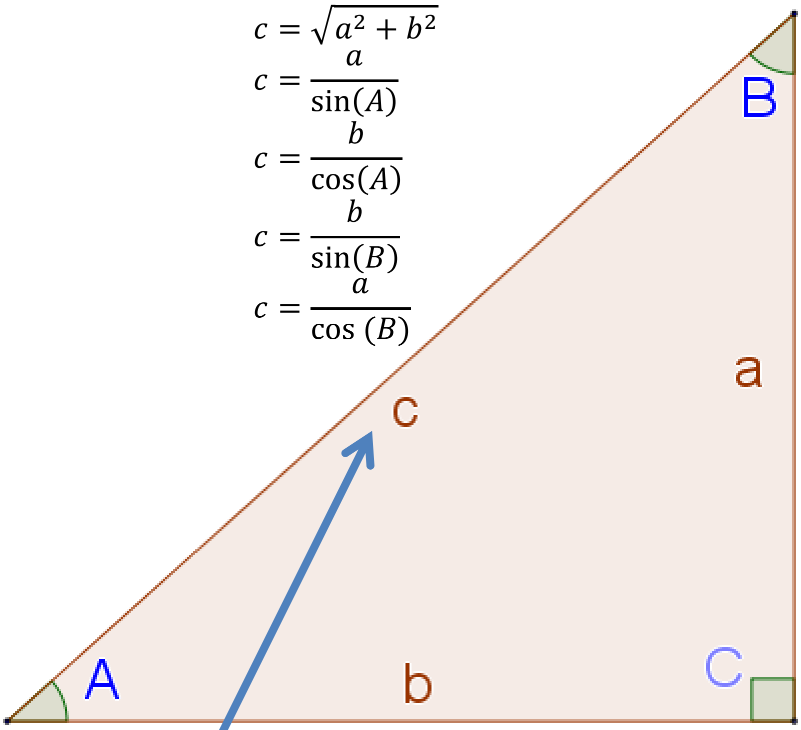


Trigonometri i retvinklede trekanter

Vinkler angives med store bogstaver (A, B og C)
Sider angives med små bogstaver (a, b og c)
Vinkel C er altid 90°

$$B = \sin^{-1}\left(\frac{b}{c}\right)$$
$$B = \cos^{-1}\left(\frac{a}{c}\right)$$
$$B = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$
$$B = 180° - 90° - A$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$c = \frac{a}{\sin(A)}$$
$$c = \frac{b}{\cos(A)}$$
$$c = \frac{b}{\sin(B)}$$
$$c = \frac{a}{\cos\,(B)}$$



$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$
$$a = \sin(A) \cdot c$$
$$a = \tan(A) \cdot b$$
$$a = \cos(B) \cdot c$$
$$a = \frac{b}{\tan(B)}$$

$$A = \sin^{-1}\left(\frac{a}{c}\right)$$
$$A = \cos^{-1}\left(\frac{b}{c}\right)$$
$$A = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$
$$A = 180° - 90° - B$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$
$$b = \cos(A) \cdot c$$
$$b = \frac{a}{\tan(A)}$$
$$b = \tan(B) \cdot a$$
$$b = \sin(B) \cdot c$$

Eksempel:

Vi kender a = 5 og B = 52° og vil gerne finde længden af siden c
Først finder vi de formler, der står ude for siden c, derefter finder vi den formel, som indeholder a og B.

$$c = \frac{a}{\cos\,(B)}$$

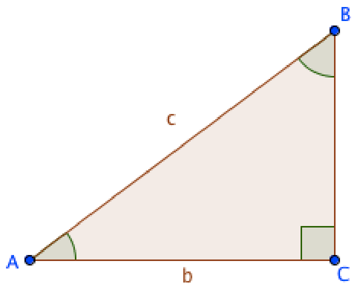
$$c = \frac{5}{\cos(52)}$$

⇕ *Ligningen løses for c vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$c = 8{,}121346$$

Se video om hvordan man bruger hjælpearket på: http://matematikbanken.dk/L/79/

Formler for retvinklede Trekanter

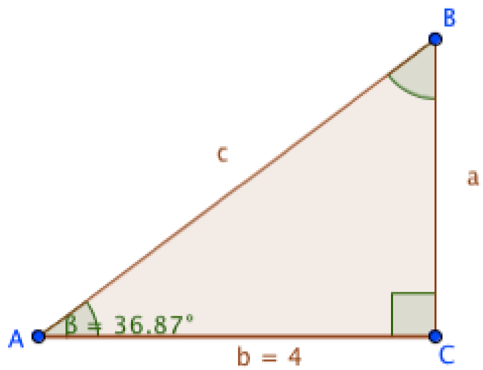


$$\cos(vinkel) = \frac{hosliggende\ katete}{hypotenusen}$$

$$\sin(vinkel) = \frac{modstående\ katete}{hypotenusen}$$

$$\tan(vinkel) = \frac{modstående\ katete}{hosliggende\ katete}$$

Eksempel:



Her kender vi vinkel A og den hosliggende katete, dermed kan vi finde værdien af hypotenusen

$$\cos(36{,}87) = \frac{4}{c}$$

Ligningen løses for c vha. CAS-værktøjet WordMatMac.

$$\boldsymbol{c = 5}$$

Eller vi kan finde værdien af den modstående katete (a)

$$\tan(36{,}87) = \frac{a}{4}$$

Ligningen løses for a vha. CAS-værktøjet WordMatMac.

$$\boldsymbol{a = 3}$$

Vilkårlige trekanter

Modsat Pythagoras-sætning og de trigonometriske formler ovenfor, der kun kan bruges i retvinklede trekanter, kan Cosinus- og sinusrelationen bruges i en hvilken som helst trekant.

Cosinusrelationen:

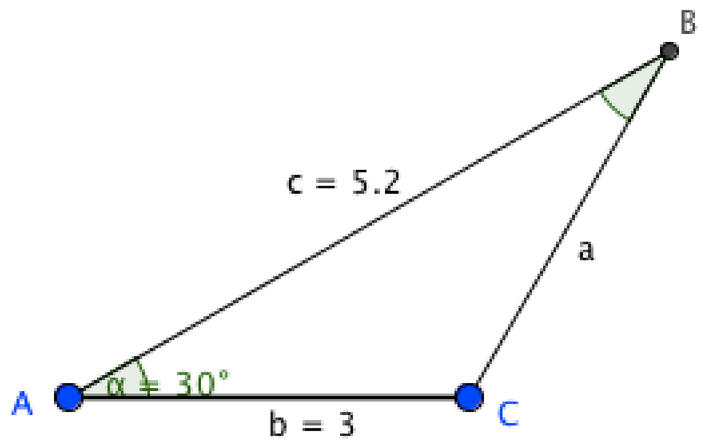
Alt efter hvilken side man ønsker at finde kan man bruge en af nedenstående formler:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(A)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(B)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(C)$$

Eksempel:



$$a^2 = 3^2 + 5{,}2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5{,}2 \cdot \cos(30)$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for a vha. CAS-værktøjet WordMatMac.*

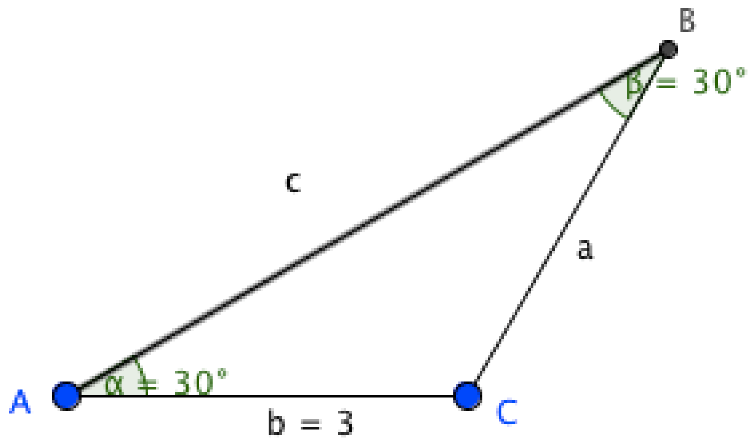
$$a = -3{,}003333 \quad \vee \quad a = 3{,}003333$$

Da et linjestykke ikke kan være negativt, ved jeg at a=3

Sinusrelationen

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

Eksempel:



$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)}$$

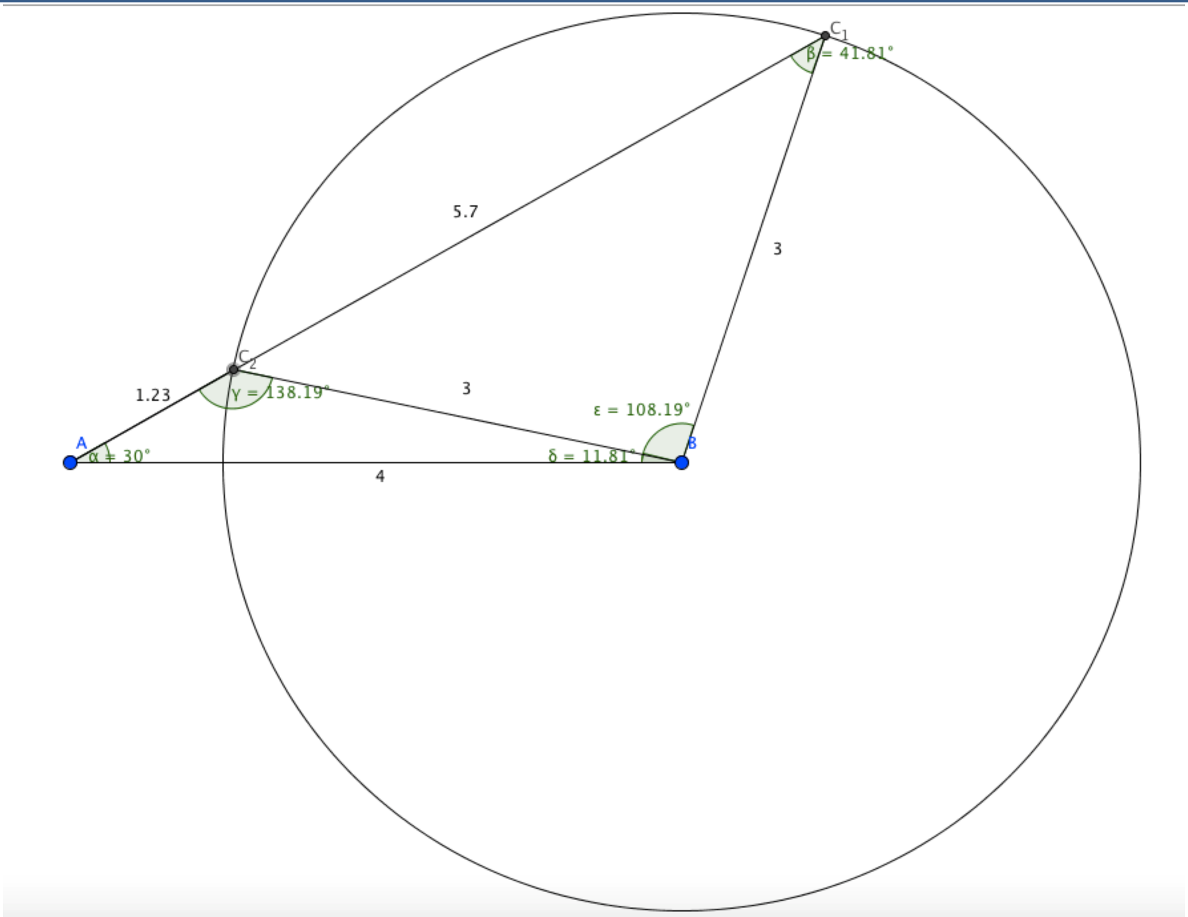
$$\frac{a}{\sin(30)} = \frac{3}{\sin(30)}$$

Ligningen løses for a vha. CAS-værktøjet WordMatMac.

$$a = 3$$

Sinusfælden

Hvis man kender vinkel A og siden a og b i en trekant, så kan der være to løsninger



Eksempel:

$Vi\ kender\ vinkel\ A = 30^0$ og at b = 4 og a = 3

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

$$\frac{3}{\sin(30)} = \frac{4}{\sin\ (C)}$$

Ligningen løses for C vha. CAS-værktøjet WordMatMac.

$$C = 41{,}81031$$

Sinus-fælden består i, at formlen kun finder den ene af løsninger. Den anden kan findes som nedenfor:

$$180 - 41{,}81 = 138{,}19$$

Statistik

"Den statistiske værktøjskasse" – Statistiske deskriptorer

Hyppighed - h(x)

Hyppigheden angiver, hvor ofte (hyppigt) de forskellige observationer forekommer. Det er altså antallet af gange, en observation forekommer. Normalt angiver man hyppigheden med "h(x)"

Summeret hyppighed - H(x)

- Den summerede hyppighed er hyppighederne lagt sammen med de foregående hyppigheder.
- Dvs. at den summerede hyppighed for eks. 8 er hyppigheden for eks. 6, 7 og 8 lagt sammen.
- Den summerede hyppighed skrives "H(x)"

Frekvens - f(x)

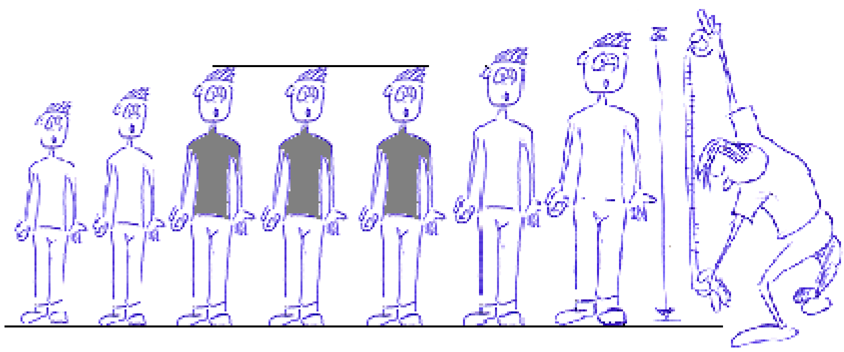
- Den hyppighed observationen kommer med i forhold til det samlede antal observationer.
- Det vil sige hyppighed divideret med antallet af observationer. Dette vil give et resultat i form af en brøk eller decimaltal.
- Vil man have resultatet i procent, skal flytte kommaet to pladser til højre og sætte %-tegnet bagved. Frekvens kan enten være i procent, brøk eller decimaltal. Det bestemmer du selv! Det vil sige, at 10%, $\frac{1}{10}$ eller 0,10 er det samme resultat på forskellige måde.

Summeret frekvens - F(x)

- Er ligesom ved summeret hyppighed, men her er det bare frekvenserne, som skal lægges sammen. Ofte vil det dog bliver mere præcist, hvis man finder den andel den summerede hyppighed udgør ud af det samlede antal observationer.

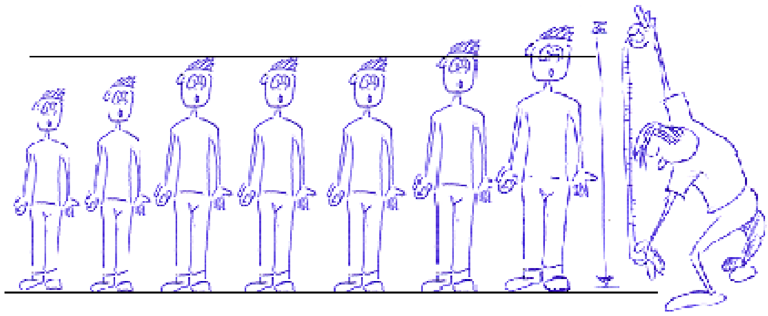
Typetallet

Typetallet er det tal, som er "typisk" for observationssættet. Det vil sige den observation, som forekommer flest gange i observationssættet.

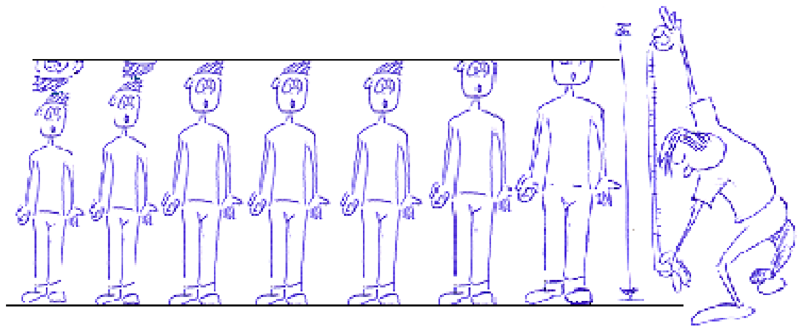


Gennemsnittet

Gennemsnittet eller middeltallet er det tal, som man får, hvis man lægger alle observationer sammen og dividerer dette tal med antallet af observationer.



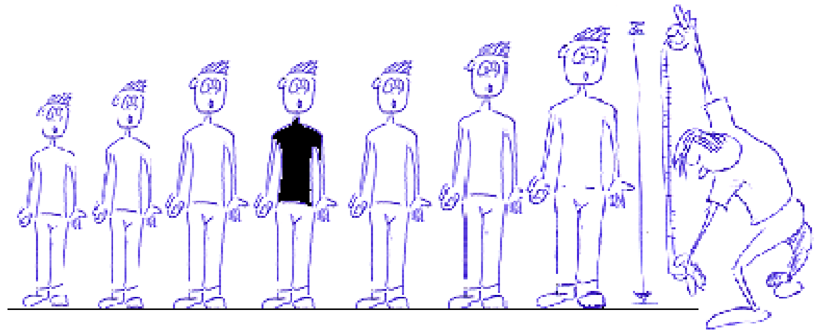
Hvis man forestiller sig, at vi har holdt kniven i den rigtig højde og har lavet det rigtige gennemsnit, vil det være sådan, at den mængde luft, der var mellem kniven og hoved på de første elever, svarer til den mængde, som vi har skåret af på de sidste elever.



Medianen

Den observation, som står i midten, hvis man stiller observationerne op i rækkefølge med de mindste tal først. Hvis der er et lige antal observationer, så der ikke er ***et*** tal i midten, tager du gennemsnittet af de 2 tal.[1]

[1] OBS: Medianen kan bestemmes på flere forskellige måder, men denne måde bruger GeoGebra



Median, typetal eller gennemsnit

Den ene deskriptor er ikke ”bedre” at bruge end de andre. Det kommer an på observationssættet og det man vil undersøge. F.eks. er en af fordelen ved medianen i forhold til gennemsnittet, at medianen er mindre påvirket af ekstreme observationer (outlayer). Er der stor forskel på median og gennemsnit, kan der måske være fejl i observationerne (f.eks. målefejl, tastefejl eller kommafejl) eller der kan bare være en stor spredning.

Størsteværdi

Den største observation i observationssættet.

- NB. Det er **ikke** det største **antal gange** en observation forekommer!

Mindsteværdi

Den mindste observation i observationssættet.

- NB. Det er **ikke** det mindste **antal gange** en observation forekommer!

Variationsbredden

Variationsbredden er forskellen på den største og den mindste observation i sættet.

- Variationsbredden finder man ved at trække største værdien og mindsteværdien fra hinanden.

Observationsdiagram - enkeltgrupperede observationer

Observationer Drenge:	h(x)	H(x)	f(x)	F(x)	Til gennemsnit
36	1	1	1%	1%	36
37	0	1	0%	1%	0
38	1	2	1%	3%	38
39	4	6	6%	9%	156
40	4	10	6%	14%	160
41	7	17	10%	25%	287

42	18	35	26%	51%	756
43	12	47	17%	68%	516
44	16	63	23%	91%	704
45	3	66	4%	96%	135
46	2	68	3%	99%	92
47	1	69	1%	100%	47
48	0	69	0%	100%	0
I alt	69				2927
Gennemsnit					42,42029

Fomler

	C	D	E	F	G	H
1	Observationer	h(x)	H(x)	f(x)	F(x)	til gemmensnit
2	36	1	=D2	=D2/$D$15	=F2	=D2*C2
3	37	0	=D3+E2	=D3/$D$15	=F3+G2	=D3*C3
4	38	1	=D4+E3	=D4/$D$15	=F4+G3	=D4*C4
5	39	4	=D5+E4	=D5/$D$15	=F5+G4	=D5*C5
6	40	4	=D6+E5	=D6/$D$15	=F6+G5	=D6*C6
7	41	7	=D7+E6	=D7/$D$15	=F7+G6	=D7*C7
8	42	18	=D8+E7	=D8/$D$15	=F8+G7	=D8*C8
9	43	12	=D9+E8	=D9/$D$15	=F9+G8	=D9*C9
10	44	16	=D10+E9	=D10/$D$15	=F10+G9	=D10*C10
11	45	3	=D11+E10	=D11/$D$15	=F11+G10	=D11*C11
12	46	2	=D12+E11	=D12/$D$15	=F12+G11	=D12*C12
13	47	1	=D13+E12	=D13/$D$15	=F13+G12	=D13*C13
14	48	0	=D14+E13	=D14/$D$15	=F14+G13	=D14*C14
15	i alt	=SUM(D2:D14)				=SUM(H2:H14)
16	Gennemsnit					=H15/D15
17						

Hjælp til at lave et statistisk observationsdiagram

Eks.

Observationssæt:

6	6	6	6	7	7	8	8	8	8	9	9	10	10	10	10	11	11	12	12
12	12	14	14	15	15	16	16	16	16	16	16	17	17	17	17	17	17	17	17

Observation	h(x)	H(x)	f(x)	F(x)
6				
7				

- Marker 6 og 7
- Træk i boksen nederste højre hjørne indtil der er alle tallene til og med 17

Indtast hyppighederne for observationerne i kolonnen h(x).

Observation	h(x)	H(x)	f(x)	F(x)
6	4			
7	2			
8	4			
9	2			
10	4			
11	2			
12	4			
13	0			
14	2			
15	2			
16	6			
17	8			
	*			

- Stil dig i feltet med stjernen og skriv =sum(og marker felterne i h(x) eller tryk på ikonet
- I stjernefeltet fremkommer antallet af observationer i dette tilfælde 40 = det man fik at vide

Observation	h(x)	H(x)
6	4	*
7	2	
8	4	
9	2	
10	4	
11	2	
12	4	
13	0	
14	2	
15	2	
16	6	
17	8	
	40	

Stil dig i feltet med stjernen og tryk = og tryk derefter på den første celle i h(x)

Observation	h(x)	H(x)	f(x)	F(x)
6	4	4		
7	2	*		
8	4			
9	2			
10	4			
11	2			
12	4			
13	0			
14	2			
15	2			
16	6			
17	8			
	40			

- Stil dig i feltet med stjernen og skriv =tryk på feltet til venstre (i dette tilfælde, hvor der står 2) skriv + og tryk på feltet over (i dette tilfælde feltet hvor der står 4) og tryk enter
- Marker det felt du har regnet i ved at trykke på det, derefter trækker du i feltets nederste højre hjørne, indtil du når bunden af statistiktabellen.

Observation	h(x)	H(x)	f(x)	F(x)
6	4	4	*	
7	2	6		
8	4	10		
9	2	12		
10	4	16		
11	2	18		
12	4	22		
13	0	22		
14	2	24		
15	2	26		
16	6	32		
17	8	40		
	40			

- I stjernefeltet skriver du = trykker på første felt i h(x) skriver / og trykker på feltet med summen af hyppigheder i dette tilfælde 40 (husk at skrive et dollartegn foran bogstavet og foran tallet fx =B2/$B$14, for at låse cellen. Så referere formlen til samme celle (med summen) hele vejen ned.
- Vælg at angive tal som procent ved at klikke på procent-knappen % i menuen.
- Marker det felt, du har regnet i, ved at trykke på det, derefter trækker du i feltets nederste højre hjørne, indtil du når bunden af statistiktabellen.

F(x) findes på samme måde som H(x) bare ved at bruge oplysninger fra f(x).

Observation	h(x)	H(x)	f(x)	F(x)	
6	4	4	10	10	
7	2	6	5	15	
8	4	10	10	25	nedre kvartil
9	2	12	5	30	
10	4	16	10	40	
11	2	18	5	45	
12	4	22	10	55	Median
13	0	22	0	55	
14	2	24	5	60	
15	2	26	5	65	
16	6	32	15	80	Øvre kvartil
17	8	40	20	100	
	40				

Følgende skema fremkommer og kvartilsættene kan aflæses.

- 8 indeholder fra 15-25% derfor er det nedre kvartil
- 12 indeholder fra 45-55% derfor er det medianen
- 16 indeholder fra 65-80% derfor er det øvre kvartil

Kvartiler
1. kvartil, 2. kvartil og 3. kvartil er de observationer, som forekommer efter henholdsvis 25%, 50% og 75% af observationerne, når observationerne er stillet i rækkefølge med det mindste først.

Bemærk:
- At 1. kvartilen også kaldes 0,25-kvartilen eller nedre kvartil.
- At 2. kvartilen også kaldes medianen eller 0,50-kvartil.
- At 3. kvartilen også kaldes øvre kvartil eller 0,75-kvartilen

Grupperede og ikke-grupperede observationer
I nogle tilfælde kan det være en fordel at dele observationerne ind i grupper. F.eks. hvis man skulle lave en statistik over en skoleklasse med 25 elever, som springer længdespring i en idrætstime. Højest sandsynlig vil man få 25 forskellige resultater med en hyppighed på 1. Det giver os ikke et så meget bedre overblik over tallene. Derfor vil man ofte se, at tallene bliver inddelt i grupper. F.eks. 0-1 meter, 1 til 2 meter osv. Disse grupper kalder man i statistik for *intervaller.*

Grupperede observationer
Intervaller
Hvis man har mange uens observationer, kan man inddele oplysningerne i grupper, som også kaldes *intervaller*.

Ved grupperede observationer vil man normalt ikke kunne finde hverken typetal, størsteværdi, mindsteværdi og variationsbredde, fordi man ofte ikke kender de enkelte observationer, men kun har observationerne samlet i et hyppighedsskema. I nogle sammenhænge kan man dog snakke om et *typeinterval*, som er det interval, hvor der er flest observationer. Man kan også finde et gennemsnit, median og kvartilerne, men man gør det normalt på en lidt anden måde ved grupperede observationer.

Ofte ser man, at der er "firkantede parenteser" omkring intervallerne "[" og "]" Disse parenteser angiver, om tallet er med eller ej. Hvis parentesen vender ind mod tallet, er tallet med. Vender parentesen væk fra tallet, betyder det, at tallet ikke er med, men tallene op til tallet er med.
- Eks. I intervallet [2;4[er tallet 2 med og så er tallene op til 4 også med, men tallet 4 er ikke med. Det vil sige 3,99999999999999999999999 osv. er med. Så man kan sige fra og med 2 til og ikke med 4.

Gennemsnit i forhold til intervalmidtpunkt
Hvis man skal finde gennemsnittet af observationer, som er inddelt i intervaller, hvor man ikke kan finde tilbage til de oprindelige observationer, skal man i første omgang finde intervalmidtpunktet. Det vil sige, man finder den midterste værdi i intervallet. Eks. hvis intervallet går fra 0 til 10, så er midtpunktet 5. Man finder intervalmidtpunktet, fordi man ikke ved hvordan observationerne fordeler sig i intervallet. Derfor går man ud fra, at observationerne fordeler sig jævnt omkring midten af intervallet.

Hvis man havde kendt observationerne, ville man lægge dem sammen og så til sidst dividere med det samlede antal. Faktisk gør man lidt det samme, når man har observationerne i intervaller. Dog er det lettere at gange intervalmidtpunkterne.

- Eks. hvis intervalmidtpunktet er 5 og hyppigheden af intervallet er 3, så svarer det til, at man har observationerne 5, 5 og 5. Derfor er det lettere at sige 5 gange 3 end 5+5+5.
- De tal, som man får ud for de enkelte intervaller, lægger man sammen og dividerer med antallet af observationer (ikke antallet af intervaller).

Observationsdiagram grupperede observationer

Observationer	h(x)	H(x)	f(x)	F(x)	Interval midtpunkt	Til gennemsnit
[155-160[	1	1	1%	1%	157,5	157,50
[160-165[	1	2	1%	3%	162,5	162,50
[165-170[	2	4	3%	6%	167,5	335,00
[170-175[	10	14	14%	20%	172,5	1.725,00
[175-180[	22	36	32%	52%	177,5	3.905,00
[180-185[	16	52	23%	75%	182,5	2.920,00
[185-190[	12	64	17%	93%	187,5	2.250,00
[190-195[	5	69	7%	100%	192,5	962,50
I alt	69				Højde i alt	12.417,50
					Gennemsnit	179,96

	B	C	D	E	F	G	H
1	intervalmidtpunkt	obs	h(x)	H(x)	f(x)	F(x)	hjælp til gen
2	5	[0-10}	8	=D2	=D2/$E$8	=F2	=D2*B2
3	15	}10-20}	11	=D3+E2	=D3/$E$8	=F3+G2	=D3*B3
4	25	}20-30}	16	=D4+E3	=D4/$E$8	=F4+G3	=D4*B4
5	35	}30-40}	28	=D5+E4	=D5/$E$8	=F5+G4	=D5*B5
6	45	}40-50}	19	=D6+E5	=D6/$E$8	=F6+G5	=D6*B6
7	55	}50-60}	12	=D7+E6	=D7/$E$8	=F7+G6	=D7*B7
8	65	}60-70}	9	=D8+E7	=D8/$E$8	=F8+G7	=D8*B8
9							=SUM(H2:H8)
10							=H9/E8

Kvartiler

1. kvartil, 2. kvartil og 3. kvartil er de observationer, som forekommer efter henholdsvis 25%, 50% og 75% af observationerne, når observationerne er stillet i rækkefølge med det mindste først.

Bemærk:

- At 1. kvartilen også kaldes 0,25-kvartilen eller nedre kvartil.
- At 2. kvartilen også kaldes medianen eller 0,50-kvartil.
- At 3. kvartilen også kaldes øvre kvartil eller 0,75-kvartilen
- Kvartiler kan også findes ved grupperede observationer, men det kræver en sumkurve først

Diagrammer

Det er ikke alle diagramtyper, som bruges ved både grupperede og ikke-grupperede observationer. Nedenfor kan du se, hvornår de forskellige diagramtyper bruges.

Diagrammer til ikke-grupperede observationer

Hvis det er observationer, som ikke er inddelt i intervaller, vil man normalt bruge følgende diagrammer:

Boksplot

Skriv boksplot i input og vælg:

Input: Boksplot[<yOffset>, <ySkalering>, <Start Værdi>, <Q1>, <Median>, <Q3>, <Slut værdi>]

yOffset - hvor den vandrette linje i boksplottet skal være fx 1 (så vil den vandrette linje i boksplottet ligge ud for 1 på y-aksen)

ySkalering - hvor bredt boksplottet er fra den vandrette linje i boksplottet og ud til hver af siderne

Start Værdi - her indskrives mindsteværdien

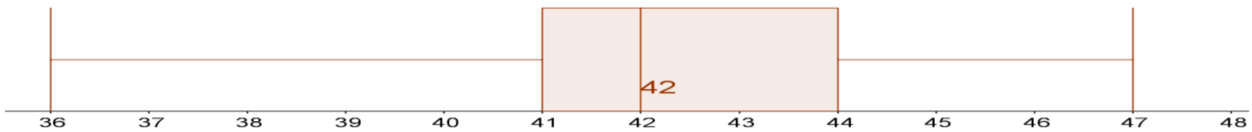
Q1 - her indskrives 1. Kvartil

Median - her indskrives medianen

Q3 - her indskrives 3. Kvartil

Slutværdi - her indskrives størsteværdien

Eksempel:
Viser drengenes skostørrelse fordeling



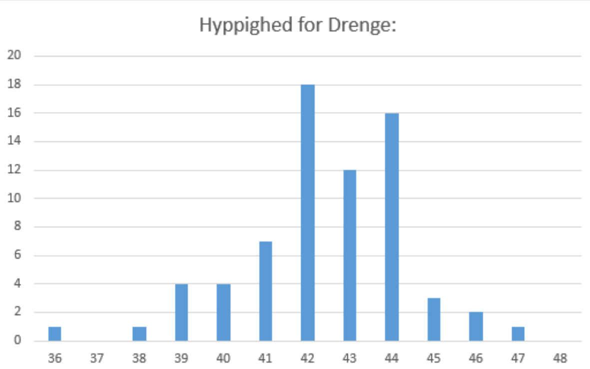
Et boksplot viser, mindsteværdi(36), 1. kvartil(41), median(42), 3. kvartil(44), størsteværdi(47) og variationsbredden(47-36=11).

Ud fra boksplottet kan man se:

- at de midterste 50 % har en skostørrelse mellem fra 41 til 44
- at de første 50 % har en skostørrelse mellem fra 36 til 41
- at de sidste 50 % har en skostørrelse mellem fra 44 til 47
- at 25 % har en skostørrelse på max 41
- at 75 % har en skostørrelse på mindst 41
- at 75 % har en skostørrelse på max 44
- at de sidste 25 % har en skostørrelse på 44 eller derover.
- at forskellen i skostørrelsen i blandt de første 25% af observationerne er større end de sidste 25%

Bemærk: Hvis man har grupperet observationer, så er man nødt til at lave en sumkurve for at finde kvartilsættet, før man kan lave et boksplot.

Pindediagram

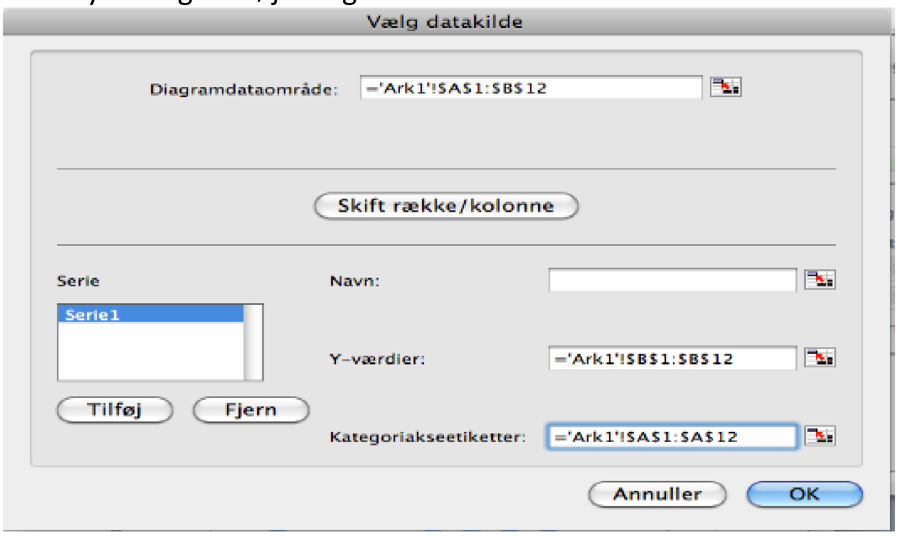


Ofte bliver der brugt mange navne om et diagram, som dette. Nogen kalder det stolpediagram, andre søjlediagram. Der findes ikke en entydig definition på, hvad der er pinde, stolpe- og søjlediagrammer. Man skal dog lægge mærke til, at under hver "pind" er der kun **et** tal.

- Til pindediagrammet bruger man kolonnen h(x) eller f(x) som serieværdi og skostørrelse som kategori.

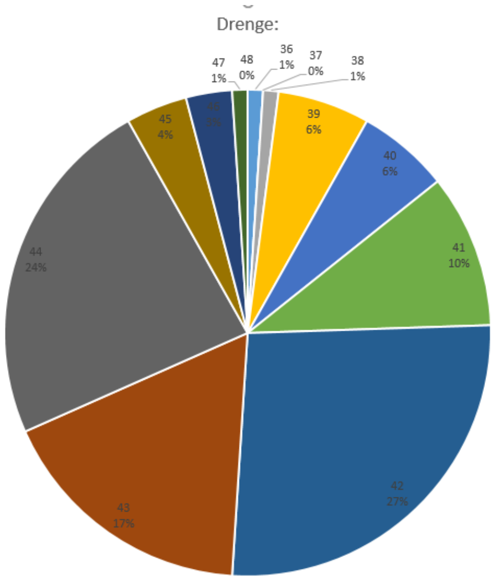
Laves således i Excel

- Stil dig i den celle du gerne vil have diagrammet indsat i
- Tryk på indsæt tabel eller tabelikonet
- Højre klik i feltet der er kommet frem og tryk på marker data
- Tryk på tilføj serie
- Klik på den lille kasse helt ude til højre udfor hvor der står y-værdier, marker i Excel-kolonnen hvor dine y-værdier er (h(x) eller f(x))
- Klik på den lille kasse helt ude til højre udfor hvor der står kategorietiketter
- Marker i Excel-kolonnen, hvor dine x-værdier er (observationer)
- Tryk ok og dit søjlediagram fremkommer.



Det er ca. det samme for i alle versioner af Excel, men der kan være større eller mindre variationer.

Cirkeldiagram



Til cirkel diagrammet bruges søjlen h(x) eller f(x) som serienavn, og skostørrelsen som kategori.

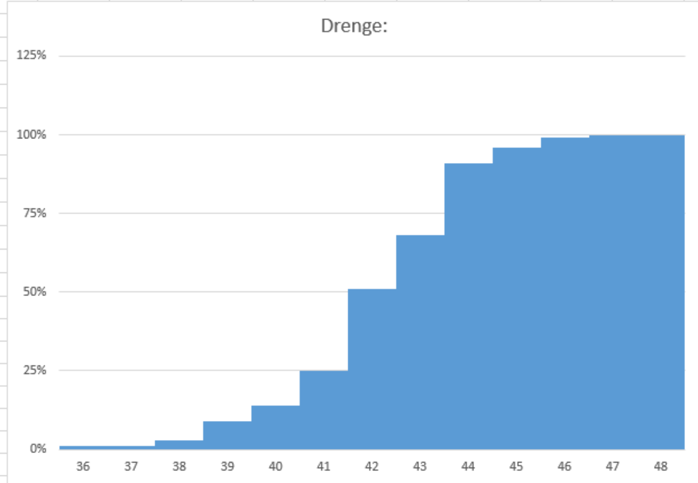
Laves i Excel

Gøres på samme måde som søjlediagrammet, man trykker bare indsæt cirkeldiagram eller trykker på cirkeldiagramikonet i stedet for. Du skal bruge h(x) eller f(x) som dine y-værdier og observationerne som dine kategoriakse.

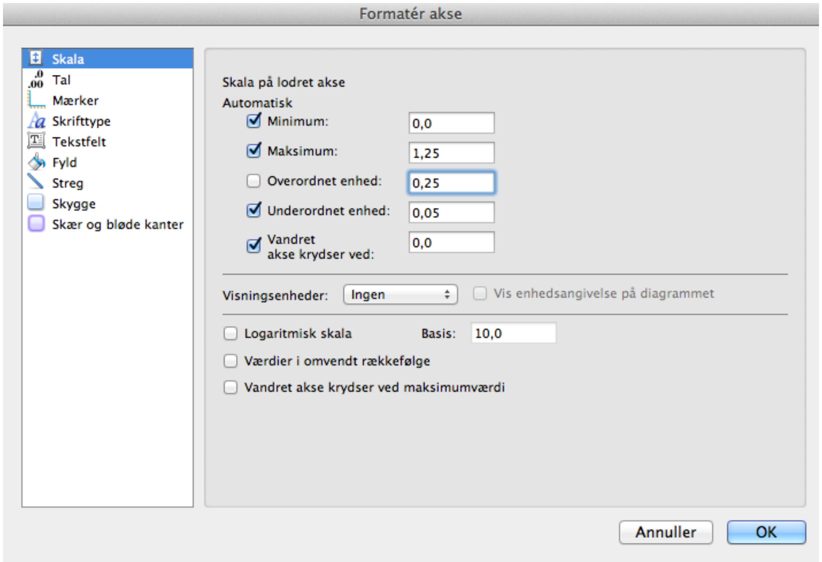
Til sidst skal du huske at højreklikke på cirkeldiagrammet og trykke tilføj dataetiketter, så der kommer procentsatser på de forskellige dele. HUSK DET!!

Trappediagram

Hvis man vil lave et trappediagram, er det normalt lettest at bruge den summerede frekvens-F(x) som udgangspunkt, men summeret hyppighed-H(x) kan også bruges.



Laves i Excel.
Lav et søjlediagram.
Brug summeret frekvens som y-værdi og observationerne som kategoriakse.
Højreklik på grafen og formater dataserie.
Juster mellemrumsbredde til 0%.
Formater y-akse ved at højreklikke på den og trykke formater akse og indstil så den overordnede enhed til 0,25.



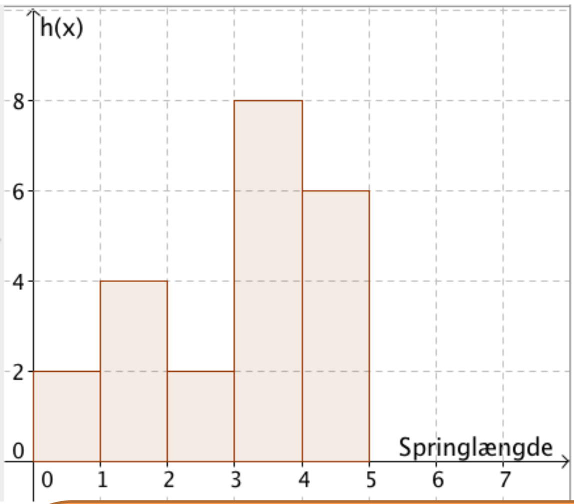
Nu kan du på dit trappediagram aflæse kvartilsæt

Diagrammer til grupperede observationer

I forbindelse med oplysninger, som er sat i intervaller, vil man normalt bruge følgende diagrammer.

Søjlediagrammer/histogram

Søjlediagram



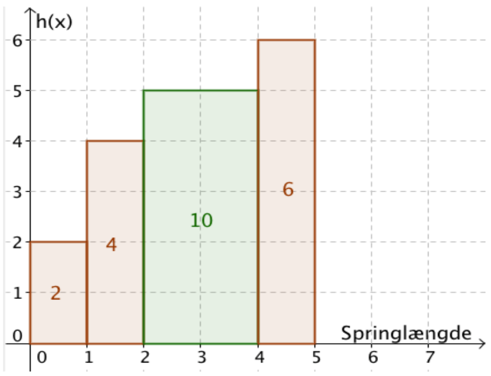
Ligesom beskrevet i forbindelse med pindediagrammet, er der ikke nogen fast regel for, hvad der er søjle- og stolpediagrammer. Dog kalder man det kun enten søjle- eller stolpediagram og ikke pindediagram. Det skyldes at det er vigtigt at søjlerne hænger sammen og ikke står som pinde med luft i mellem.

Bemærk at søjlen går **mellem de to yderpunkter i intervallet** . F.eks. fra 1 til 2. Det vil sige at i intervallet fra 1 til 2 er der to observationer, hvis man aflæser søjlediagrammet ovenfor.

Videovejledning til søjlediagrammer: https://www.youtube.com/watch?v=KHKoO0wPsV4

Det er normalt kendetegnende for søjlediagrammer, at intervallerne skal være lige store. Det betyder, at man kan aflæse intervalhyppigheden eller intervalfrekvensen ved at se på højden af søjlerne.

Histogram

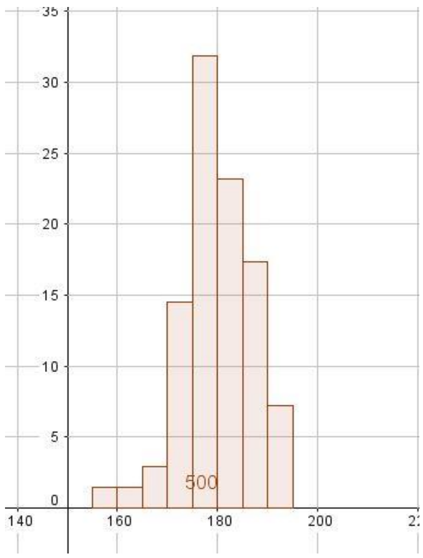


En særlig type af søjlediagrammer er histogrammer. Histogrammer bruger man, når man har intervaller, som **ikke er lige store**. I forhold til søjlediagrammet kigger man ikke på højden af søjlerne i histogrammet. Derimod kigger man på arealet af søjlen, når man skal aflæse intervalhyppighed eller intervalfrekvens. I eksemplet ovenfor er der 10 observationer i intervallet fra 2 til 4. Og der er 6 observationer i intervallet fra 4 til 5. Men da intervallet fra 2 til 4 er dobbelt så bredt som intervallet fra 4 til 5, bliver søjlen for det sidste interval højest. Det er dog som sagt ikke højden, men arealet man kigger på. Og her kan man aflæse at intervallet 2 til 4 har et areal på 10 tern og dermed en intervalhyppighed på 10 og intervallet 4 til 5 har en intervalhyppighed på 6.

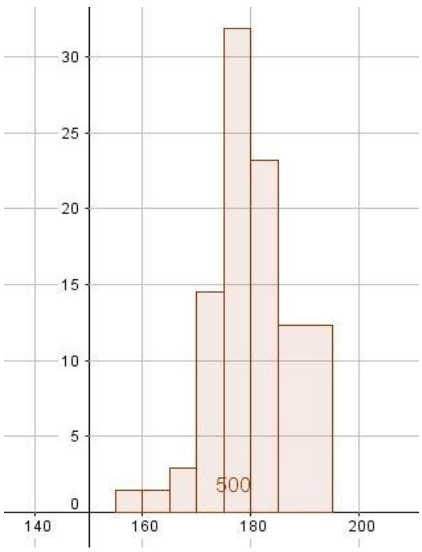
Det er noget mere vanskeligt at lave histogrammer. Derfor vil det ofte være en god ide, at man laver intervallerne lige bredde, da man så kan lave et "almindeligt søjlediagram" og kun skal have fokus på højden, fordi bredden i intervallerne er den samme.

Både søjlediagrammet og histogrammet bruger man til at vise tallene fra enten intervalhyppigheden eller intervalfrekvensen.

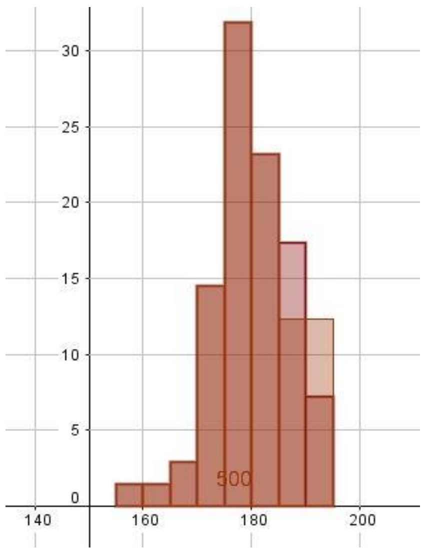
Videovejledning til histogrammer: https://www.youtube.com/watch?v=Vc34MGAySAA



Søjlediagram med lige store intervaller

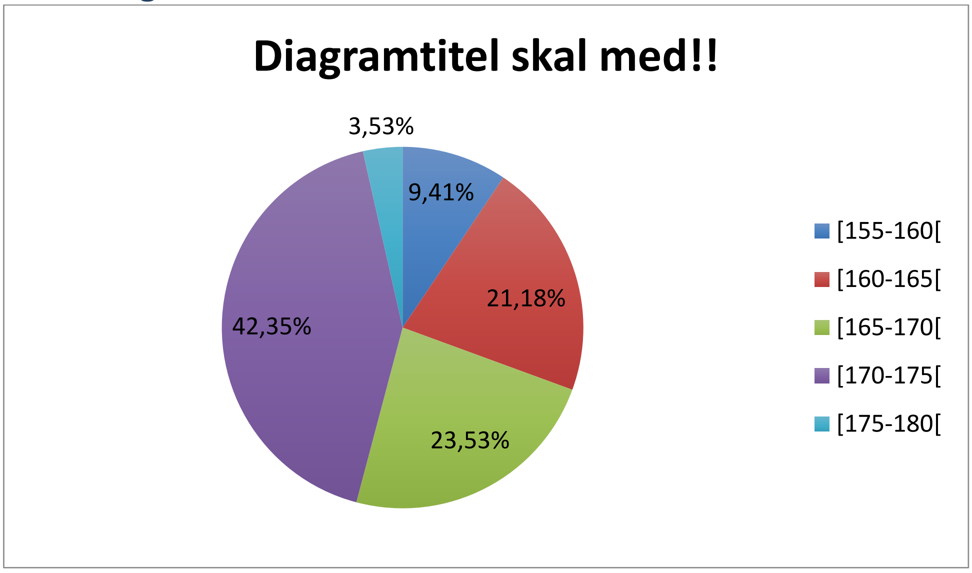


Histogram hvor intervallet ikke er lige store



Viser forskellen mellem søjle- og histogrammet

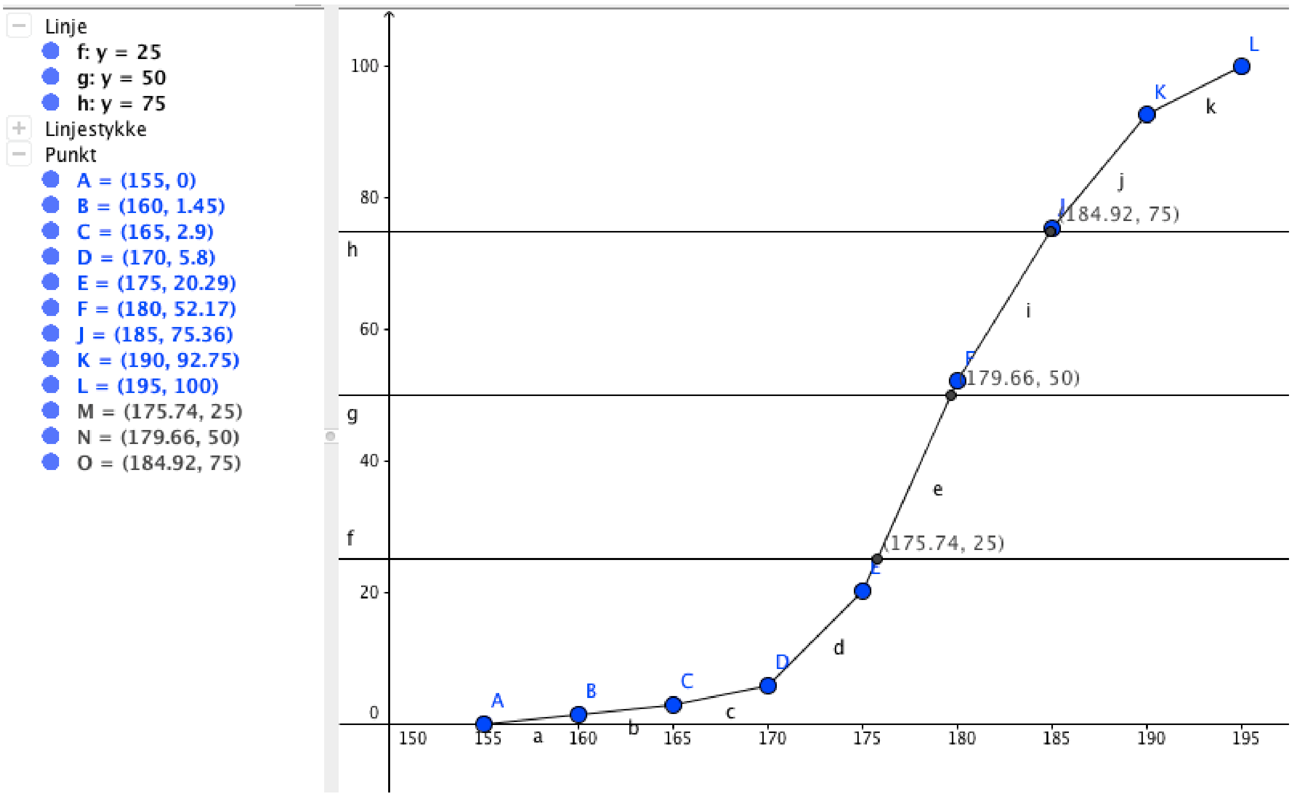
Cirkeldiagram



Se hvordan man laver det under enkeltgrupperede observationer

Sumkurver

Hvis man vil lave en sumkurve er det bedst at bruge den summerede frekvens-F(x) som udgangspunkt, men summeret hyppighed-H(x) kan også bruges.



Læg mærke til, at kvartilerne er indtegnet. Ved de ikke-grupperede observationer kunne vi finde medianer og kvartiler ved at kigge på observationssættet eller skemaet. Det er ikke så let ved de grupperede observationer. Her er man nødt til at aflæse på grafen. På grafen ovenfor er 50% = medianen 179,66.

Sumkurven bruges som værktøj på linje med boksplot til at beskrive fordelingen af observationer i et observationssæt. Men den er samtidig et redskab til at finde kvartiler.

Excel-vejledning:

For at kunne lave sumkurven kan man enten gøre det i Excel – se denne video http://goo.gl/tcvwn

GeoGebra-vejledning:

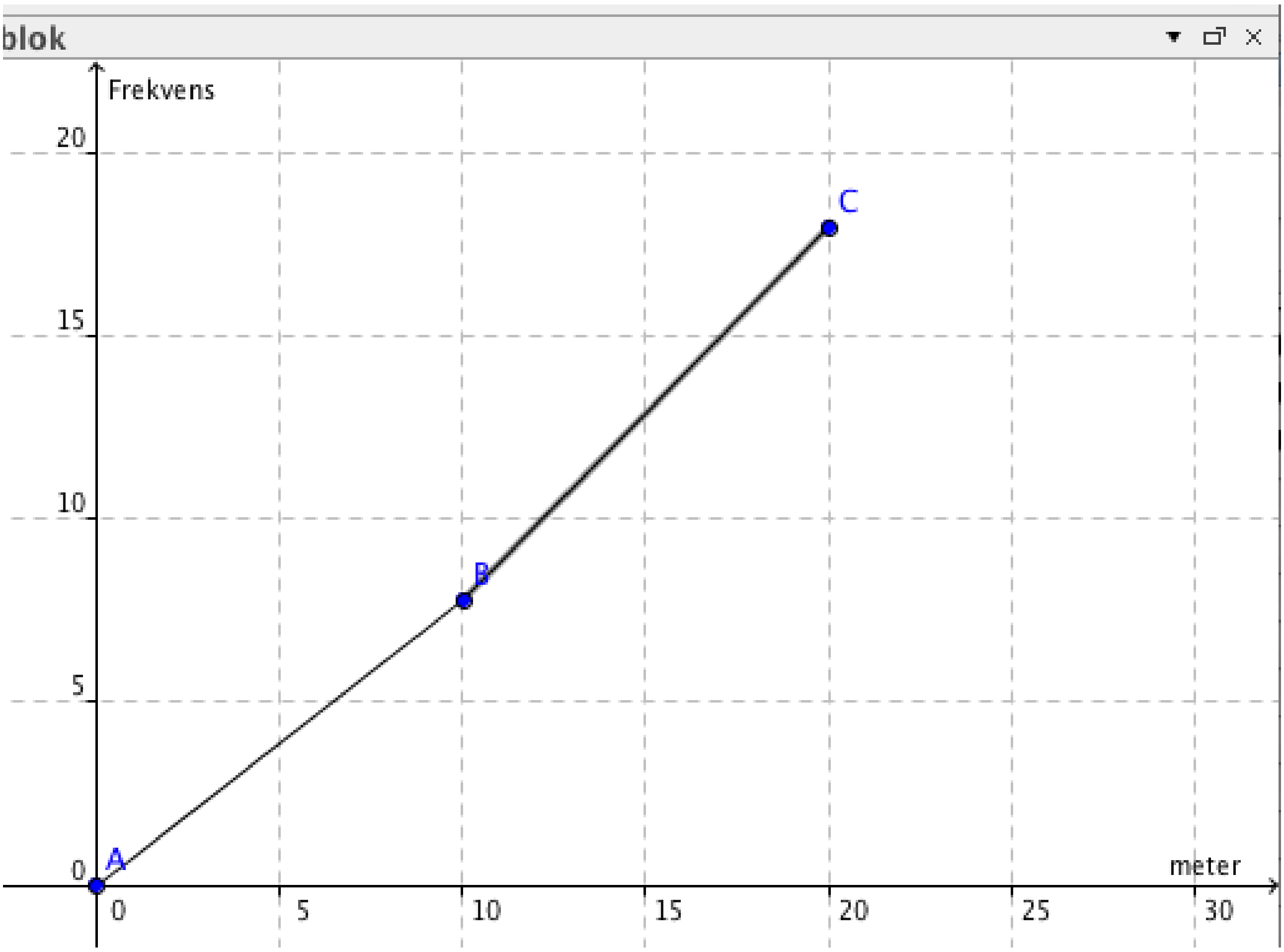
Man kan også gøre det i GeoGebra.
Man laver en stykvis graf for hvert interval.
Første interval hedder [0-10] – der er en frekvens på 7,77%
Grafen må derfor gå fra (0,0) → (10,7.77)

Andet interval hedder]10,20] – er er yderligere en frekvens på 10,68%. Her er det nemmest at bruge summeret frekvens-F(x). Fra [0-20] er der ca. 18%, så]10-20] går fra 7,77% op til 18%

Denne del må gå fra (10,7.77) → (20,18)
Fortsæt med resten af intervallerne.

Husk at en sumkurve aldrig må falde og ender altid på 1 eller 100% (når man bruger summeret frekvens)

Videovejledning kan findes på: https://www.youtube.com/watch?v=W1JK9e8WM1k



For at kunne aflæse kvartilerne indsætter du i input-linjen y=25, y=50 og y=75 og finder skæringspunkterne med grafen

Statistik ud fra rådata i GeoGebra.

Du har en række af data.

En skoleklasse vil undersøge, hvor lang tid eleverne sidder foran en elektronisk skærm på en normal hverdag. Fra de står op til de går i seng.

Oversigt over tid som 9.a's elever bruger på ikke undervisningsrelevant brug af elektronisk skærm. (PC, tablet, fjernsyn, smartphone m.v.)

Rå data

1	2	0	4	6	2	5	3	2	1
5	5	3	2	3	4	7	9	3	7

9. b laver samme undersøgelse, men har sorteret deres data i en hyppighedstabel

Obs	h(x)
0	0
1	1
2	3
3	4
4	6
5	5
6	3
7	0
8	0
9	1

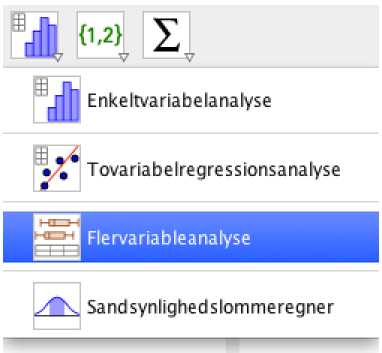
For at man nemmest kan bruge data i GeoGebra, så skal man lave hyppighedstabellen til rådata.

Fremgangsmåde:

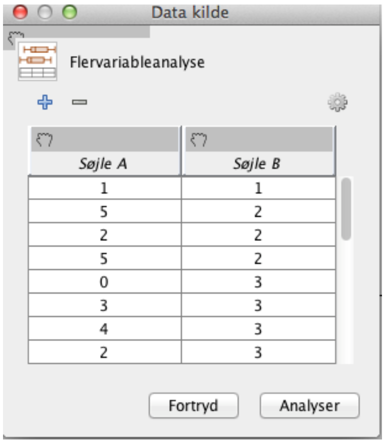
1. Start GeoGebra →Tryk vis → regneark
2. Kopiere 9. A data ind i kolonne A, og 9. B's data i kolonne B
    a. Så ser det sådan her ud

	A	B
1	1	1
2	5	2
3	2	2
4	5	2
5	0	3
6	3	3
7	4	3
8	2	3
9	6	4
10	3	4
11	2	4
12	4	4
13	5	4
14	7	4
15	3	5
16	9	5
17	2	5
18	3	5
19	1	5
20	7	6
21		6
22		6
23		9
24		

Marker nu kolonne A og kolonne B og tryk på grafikonet i menulinjen. Bemærk at dette ikon kun er synligt, når man arbejder i regnearket.

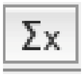


Tryk på flervariabelanalyse

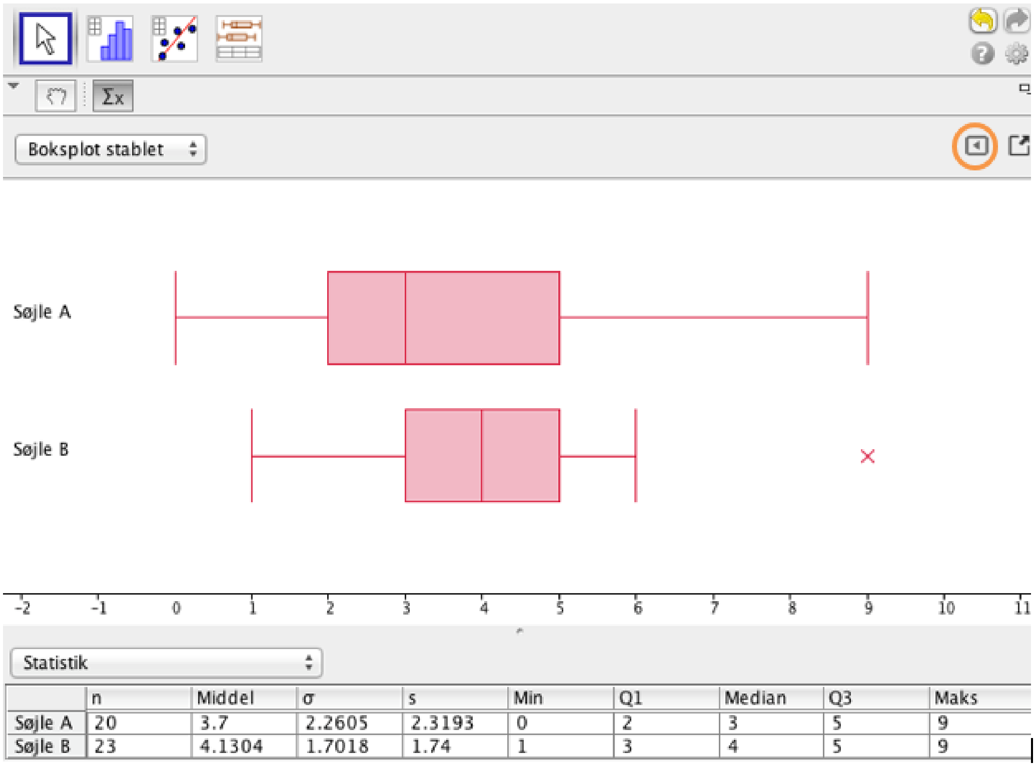


Søjle A	Søjle B
1	1
5	2
2	2
5	2
0	3
3	3
4	3
2	3

Tryk analyser

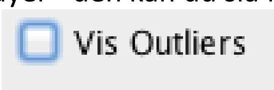
Tryk på  for at få udvidet oplysninger.

Nu skulle det gerne se således ud

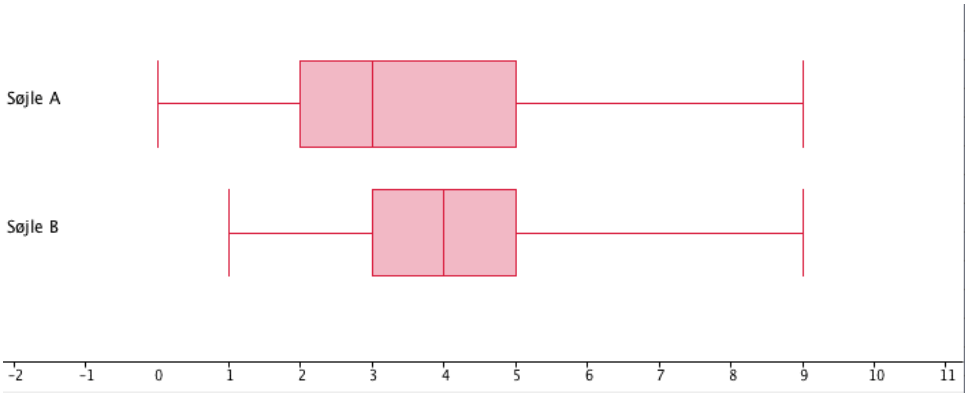


	n	Middel	σ	s	Min	Q1	Median	Q3	Maks
Søjle A	20	3.7	2.2605	2.3193	0	2	3	5	9
Søjle B	23	4.1304	1.7018	1.74	1	3	4	5	9

Læg mærke til krydset - det er en outlayer - den kan du slå fra ved at trykke på

 og fjerne fluebenet i vis Outliers 

.



Statistik

	n	Middel	σ	s	Min	Q1	Median	Q3	Maks
Søjle A	20	3.7	2.2605	2.3193	0	2	3	5	9
Søjle B	23	4.1304	1.7018	1.74	1	3	4	5	9

Økonomi

Vækst

Slutkapital (K_n)

Når man vil finde ud af, hvad der står på kontoen efter n terminer med en rentetilskrivning pr. termin.

$$K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n$$

K_n = Slutkapitalen/slutværdien
K_0 = Startkapitalen/startværden
r = Renten/tilvæksten i % pr. termin
n = Antal terminer

Eksempel:
Bent indsætter 1000 kr. på en konto, hvor han får 3% i rente p.a. (pr. år).
Hvor mange penge er der på kontoen efter 5 år (som er 5 terminer i denne opgave)?

$$K_n = 1000 \cdot (1 + 0{,}03)^5 \approx 1159{,}274$$

Eller

$$K_n = 1000 \cdot (1 + 0{,}03)^5$$

Ligningen løses for Kn vha. CAS-værktøjet WordMatMac.

$$Kn = 1159{,}274$$

Dvs. der står 1159,27 kr. på kontoen efter 5 år

Startkapital (K_0)

Når man vil finde ud af, hvad man i sin tid indsatte på kontoen, når man ved hvor mange terminer, man har haft pengene stående og til en bestemt rente.

$$K_0 = \frac{K_n}{(1 + r)^n}$$

K_n = Slutkapitalen/slutværdien
K_0 = Startkapitalen/startværden
r = Renten/tilvæksten i % pr. termin
n = Antal terminer

Eksempel:
Hanne har i dag 1500 kr. Pengene har udviklet sig med 10% pr. måned (som er terminer i denne opgave). Hvor mange penge havde hun for 5 måneder (terminer) siden?

$$K_0 = \frac{1500}{(1+0{,}1)^5} \approx 931{,}382$$

Eller

Skriv kendte oplysninger ind i ”grundformlen” for vækst og løs i WordMat.

$$1500 = K_0 \cdot (1+0{,}1)^5$$

Ligningen løses for Ko vha. CAS-værktøjet WordMat

$$K_0 = 931{,}382$$

Dvs. at Hanne for 5 måneder siden havde 931,38 kr.

Halvårlig rentetilskrivning

Når renter tilskrives hvert halve år, skal man bruge den **halve rente** i **dobbelt antal terminer**.

Eksempel: Hvis renten er 4% p.a. med halvårlig rentetilskrivning, og man har pengene stående i 3 år, så er de oplysninger, som man skal regne med, 2% i 6 terminer.

Månedlig rentetilskrivning

Når renter tilskrives hvert måned, skal man bruge **rente p.a. divideret med 12** i **12 gange så mange terminer**.

Eksempel: Hvis renten er 6% p.a. med månedlig rentetilskrivning, og man har pengene stående i 3 år, så er de oplysninger, som man skal regne med, 0,5% i 36 terminer.

Renten/tilvæksten i % (r)

Når man gerne vil finde, hvad renten er eller hvor stor tilvæksten har været pr. termin og man kender startværdien, slutværdien og antal terminer.

$$r = \sqrt[n]{\left(\frac{K_n}{k_0}\right)} - 1$$

K_n = Slutkapitalen/slutværdien
K_0 = Startkapitalen/startværden
r = Renten/tilvæksten i % pr. termin
n = Antal terminer

Eksempel:
I Vanløse Vandpoloklub var der 85 medlemmer i 2000 og 154 medlemmer i 2017.
Antal terminer er $2017 - 2000 = 17$ terminer

$$r = \sqrt[17]{\left(\frac{154}{85}\right)} - 1 \approx 0{,}03557715$$

Eller

$$154 = 85 \cdot (1 + x)^{17}$$

Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat

$$r = 0{,}0355771485$$

Dvs. der har været en tilvækst på 3,56% pr. år

Terminer (n)

Når man gerne vil finde antal af terminer og man kender startværdi, slutværdi og den procentvise tilvækst pr. termin.

$$n = \frac{\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\ln\,(1 + r)}$$

K_n = Slutkapitalen/slutværdien
K_0 = Startkapitalen/startværden
r = Renten/tilvæksten i % pr. termin
n = Antal terminer

Eksempel:
En konto, hvor man får 2% i rente p.a., har udviklet sig fra 500 kr. til 1000 kr. Over hvor mange år er det sket?

$$n = \frac{\ln\left(\frac{1000}{500}\right)}{\ln(1 + 0{,}02)} \approx 35{,}00279$$

Eller

$$1000 = 500 \cdot (1 + 2\%)^n$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for n vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$n = 35{,}00279$$

Dvs. det tager ca. 35 år at få kontoen op på 1000 kr.

Effektiv rente (Kaldes ofte også for debitorrente)

Eksempel:
Et firma har en rente på 24% p.a. med rentetilskrivning hver måned. Det bliver så 2% i rente pr. måneden. (se evt. forklaring ovenfor)

Hvad er den effektive rente?

I denne opgave skal vi forholde os til to begreber:
Den årlige nominelle rente og **Den årlige effektive rente.**

Hvis der er flere terminer/rentetilskrivninger på et år, finder man renten pr. termin ved at dele den opgivne rentesatsen **den årlige nominelle renten** med antallet af terminer. I eksemplet ovenfor er den årlige nominelle rente på 24%, som skal deles ud på 12 måneder. Dette er så 2% pr. måned.

Den samlede rente som tilskrives over et år kaldes **Den årlige effektive rente**.
Den effektive adskiller sig fra den årlige nominelle rente, da beløbet, som man tager de 2% af, bliver højere for hver måned, hvor der bliver tilskrevet renter. Med andre ord, vil der komme rentes rente på rentetilskrivningerne allerede efter den første rentetilskrivning. Derfor vil renten, som reelt tilskrives i løbet af et år (**Den effektive rente**), bliver højere end **den nominelle rente**.

$$Effektiv\ rente = (1 + r\%)^n - 1$$

r=Renten pr. periode
n=Antal rentetilskrivninger pr. år.

Beregning:
Nominel rente på 24% p.a. med rentetilskrivning hver måned

$$Effektiv\ rente = (1 + 2\%)^{12} - 1 \approx 0{,}2682418 = 26{,}8\%$$

Så i dette tilfælde er den effektive årlige rente 26,8%, mens den årlige nominelle rente er 24%.

Vækstfunktion
Når man vil tegne en vækstfunktion, har man typisk antal af terminer ud af x-aksen og værdierne af K_n op af y-aksen.

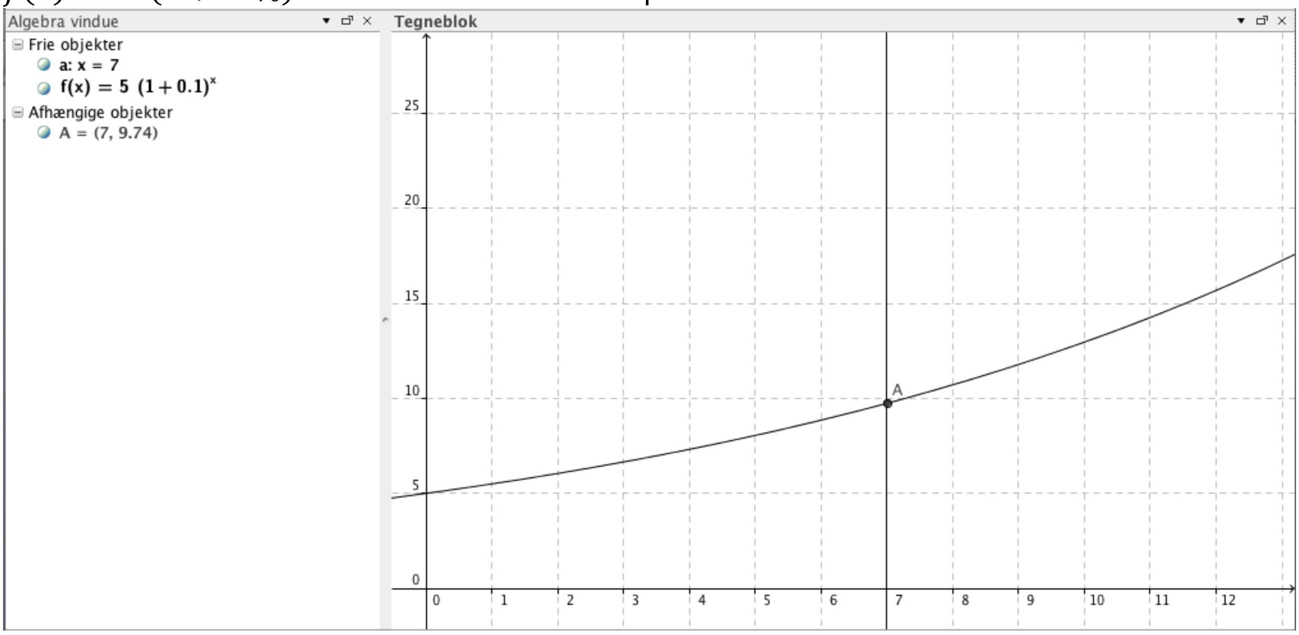
Standardforskrift til vækstfunktion

$$f(x) = K_0 \cdot (1 + renten\%)^x$$

Når man laver vækstfunktionen, vil man gerne kunne aflæse, hvad der er på kontoen efter en hvilken som helst antal terminer. Så derfor svarer x i forskriften til antallet af terminer og f(x) svarer til slutværdien. Vi skal altså **ikke** sætte et tal ind på x's plads, når vi laver forskriften.

Til gengæld sætter vi en værdi ind på K_0's plads og på den plads, hvor renten er i formlen. Se nedenfor.

Eksempel:
Hvis vi vil lave et grafisk billede af 5 kroners udvikling på en konto med 10 % i rente i x antal år.
Så K_0=5 og renten = 10%
$f(x) = 5 \cdot (1 + 10\%)^x$ Indtastes i GeoGebras inputfelt



Finde skæring med grafen:
Hvis man vil undersøge, hvor mange penge der er på kontoen efter 7 terminer.
Skriver man x=7 i inputlinjen → Find skæringspunktet mellem den lodrette linje og grafen → Aflæs y-koordinaten i skæringspunktet, som her er 9,74 aflæst i algebravinduet.
Dvs. efter 7 terminer er der 9,74 kr. på kontoen.

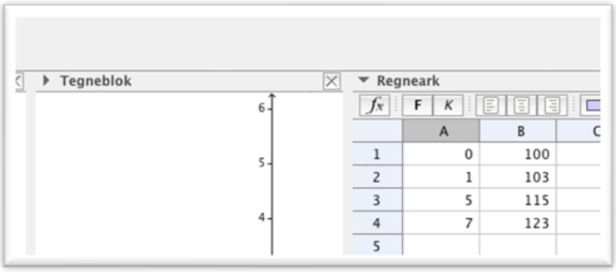
Fremskrivning vha. GeoGebra

I et område bor der 100 beboere i 2008.
Nedenstående tabel viser udviklingen i området.

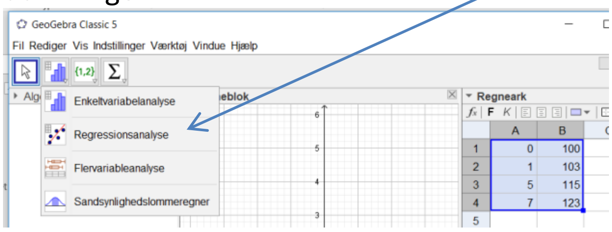
År	År	Antal beboere
2008	0	100
2009	1	103
2013	5	115
2015	7	123
2020	12	?

Opgaven er at lavet et kvalificeret gæt på, hvor mange der vil være i 2020.

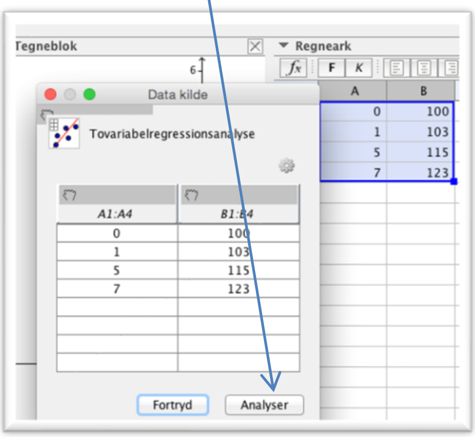
Indtast punkterne i GeoGebra i regnearket.



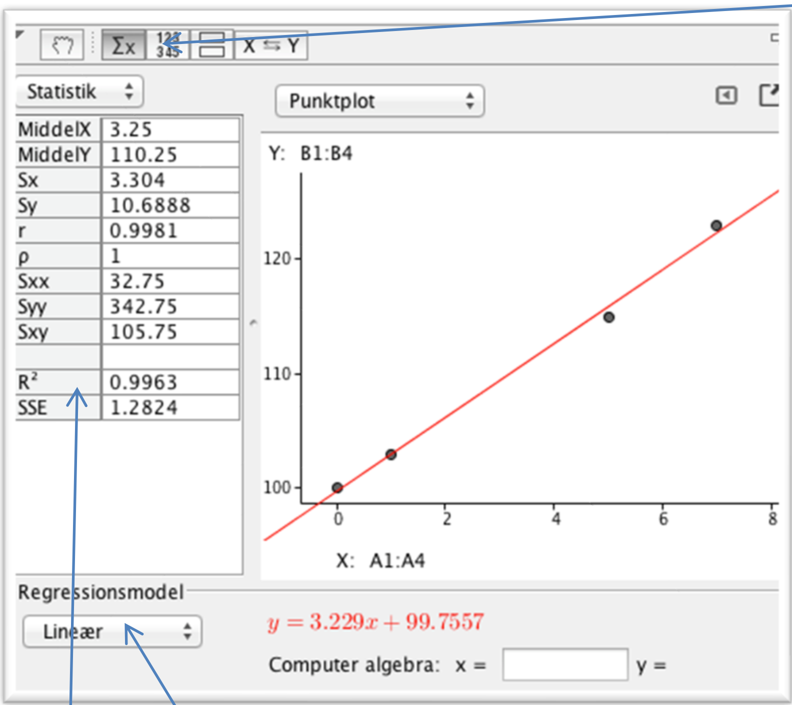
Marker cellerne og lav en "Regressionsanalyse" for at finde ud af, hvilken graf der passer bedst til udviklingen.



Tryk på analyser



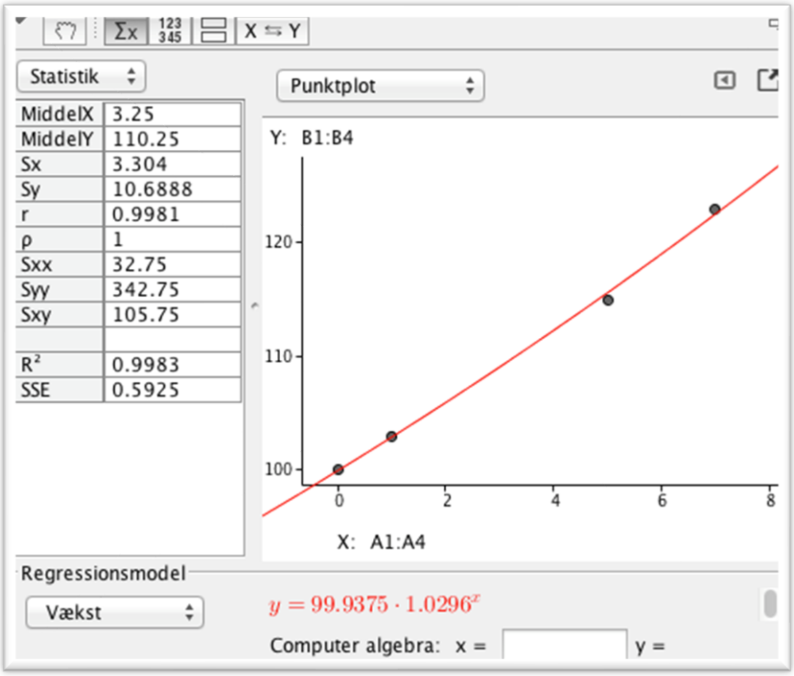
Følgende statistikvindue skulle gerne kom frem (og hvis ikke tryk på dette tegn)



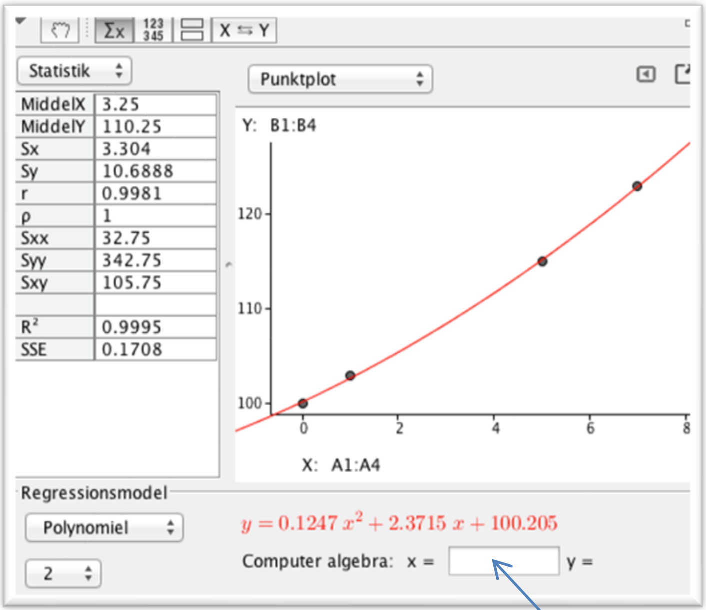
Vælg "Regressionsmodel. Her er der eksempelvis valgt "lineær" som regressionsmodel

Den regressionsmodel, som umiddelbart bedst beskriver udvikling, er den regressionmodel, hvor R^2 kommer tættest på 1.

Prøv både lineær, polynomiel og vækst som regressionsmodel



Her er der valgt vækst



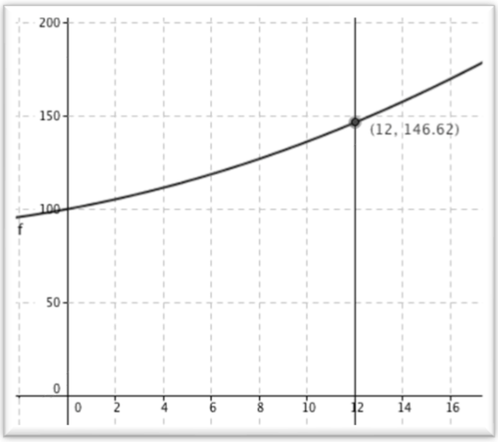
Her er der valgt polynomiel (2. grad)

I dette tilfælde beskriver 2. gradsfunktionen udviklingen bedst, da R^2-testen er tættest på 1
Man kan se, at det er en andengradsfunktion, da Regressionsmodel er Polynomiel og 2-tallet i boksen under angiver, at det er 2. grad.

For at undersøge hvor mange der er efter 12 år, skriver man ”12” her, og der vil komme et output.

Eller

Skriv f(x) = $0.1247x^2 + 2.3715x + 100.205$ i inputfeltet i GeoGebra (som står med rødt i vinduet ovenfor). Linjen x = 12 indsættes og så kan man aflæse antallet efter 12 perioder
f(12)=146,62 i dette eksempel.



Heraf kan der aflæses at der i 2020 vil være ca. 147 beboere, hvis udviklingen fortsætter, som vi har set hidtil.

Opsparing

Regneark

Hjælp til dynamisk model:

1.

	A	B	C	D
1	Startkapital	1200		
2	Renten	5,00%	p.a.	
3				
4	År	bankkonto januar	renten	bankkonto dec
5	2015	=B1		
6	2016			

2.

	A	B	C	D
1	Startkapital	1200		
2	Renten	5%	p.a.	
3				
4	År	bankkonto ja	renten	bankkonto dec
5	2015	1200	=$B$2*B5	

3.

	A	B	C	D
1	Startkapital	1200		
2	Renten	5,00%	p.a.	
3				
4	År	bankkonto januar	renten	bankkonto dec
5	2015	1200,0	60,0	=B5+C5
6	2016			

4.

	A	B	C	D
1	Startkapital	1200		
2	Renten	5,00%	p.a.	
3				
4	År	bankkonto januar	renten	bankkonto dec
5	2015	1200,0	60,0	1260,0
6	2016	=D5		
7	2017			

Derefter trækker man i nederste højre hjørne af celle B6, C5 og D5.

Redigeret: 29. oktober 2020

Opsparing (annuitetsopsparing)

Jeg vil gerne spare penge op. Jeg har mulighed for at indsætte 1.000 kr. på en konto hvert år.
Hvert år den 1. jan. Indsætter jeg de 1000 kr.
I banken får jeg 5% i rente af det, som jeg har stående på kontoen.
Opsparingen her laves lettest i et dynamisk regneark, hvilket kræver cellehenvisning.

	A	B
1	Opsparing	
2		
3	Indbetaling	1000
4	Rente	5%
5		
6	År	Indbetaling den 1. jan
7	2016	=$B$3

Der er sat dollartegn foran både bogstav og tal. Det gør, at man låser henvisningen til en bestemt celle.
Efterfølgende kan jeg trække i cellen B7, og den bliver ved med at henvise til celle B3 i alle årene.

	A	B
1	Opsparing	
2		
3	Indbetaling	1000
4	Rente	5%
5		
6	År	Indbetaling den 1. jan
7	2016	1000
8	2017	
9	2018	

Så trækker jeg i nederste højre hjørne af celle B7, og der kommer til at stå 1000 i B-kolonnen ud for alle år.

6	År	Indbetaling den 1. jan
7	2016	1000
8	2017	1000
9	2018	1000
10	2019	1000
11	2020	1000
12	2021	1000
13	2022	1000
14	2023	1000
15	2024	1000
16	2025	1000

Da saldo 1.jan 2006 er lige med indbetalingen, skal det bare være =B7. De følgende år er det lidt anderledes.
Rentetilskrivningen gøres på følgende måde:
Tryk *Enter* og stil dig i celle D7, og så kan du trække i højre nederste hjørne af celle D7.

	A	B	C	D
1	Opsparing			
2				
3	Indbetaling	1000		
4	Rente	5%		
5				
6	År	Indbetaling den 1. jan	Saldo pr. 1. jan	Rentetilskrivning
7	2016	1000	1000	=$B$4*C7

Dette billede kommer frem:

	A	B	C	D
1	Opsparing			
2				
3	Indbetaling	1000		
4	Rente	5%		
5				
6	År	Indbetaling den 1. jan	Saldo pr. 1. jan	Rentetilskrivning
7	2016	1000	1000	50
8	2017	1000		0
9	2018	1000		0
10	2019	1000		0
11	2020	1000		0
12	2021	1000		0
13	2022	1000		0
14	2023	1000		0
15	2024	1000		0
16	2025	1000		0
17				

Saldo pr. 31. dec. gøres på følgende måde:

6	År	Indbetaling den 1. jan	Saldo pr. 1. jan	Rentetilskrivning	Saldo pr. 31. dec
7	2016	1000	1000	50	=C7+D7

Saldo pr. 1. Jan. 2017 findes på følgende måde:

6	År	Indbetaling den 1. jan	Saldo pr. 1. jan	Rentetilskrivning	Saldo pr. 31. dec
7	2016	1000	1000	50	1050
8	2017	1000	=E7+B8		

Nu kan du trække i celle E7 og C8 og følgende billede skal fremkomme:

	A	B	C	D	E
1	Opsparing				
2					
3	Indbetaling	1000			
4	Rente	5%			
5					
6	År	Indbetaling den 1. jan	Saldo pr. 1. jan	Rentetilskrivning	Saldo pr. 31. dec
7	2016	1000	1000	50	1050
8	2017	1000	2050	102,5	2152,5
9	2018	1000	3152,5	157,625	3310,125
10	2019	1000	4310,125	215,50625	4525,63125
11	2020	1000	5525,63125	276,2815625	5801,912813
12	2021	1000	6801,912813	340,0956406	7142,008453
13	2022	1000	8142,008453	407,1004227	8549,108876
14	2023	1000	9549,108876	477,4554438	10026,56432
15	2024	1000	11026,56432	551,328216	11577,89254
16	2025	1000	12577,89254	628,8946268	13206,78716
17					

Her kan det være en fordel kun at have tallene med 2 decimaler efter komma, og det gøres vha. 

	A	B	C	D	E
1	Opsparing				
2					
3	Indbetaling	1000,00			
4	Rente	5%			
5					
6	År	Indbetaling den 1. jan	Saldo pr. 1. jan	Rentetilskrivning	Saldo pr. 31. dec
7	2016,00	1000,00	1000,00	50,00	1050,00
8	2017,00	1000,00	2050,00	102,50	2152,50
9	2018,00	1000,00	3152,50	157,63	3310,13
10	2019,00	1000,00	4310,13	215,51	4525,63
11	2020,00	1000,00	5525,63	276,28	5801,91
12	2021,00	1000,00	6801,91	340,10	7142,01
13	2022,00	1000,00	8142,01	407,10	8549,11
14	2023,00	1000,00	9549,11	477,46	10026,56
15	2024,00	1000,00	11026,56	551,33	11577,89
16	2025,00	1000,00	12577,89	628,89	13206,79

Annuitetsopsparingsformel:
Opsparingsformlen kan benyttes, når man sætter lige store beløb ind og til en fast rente

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$y = ydelsen$
r=renten
n=antal terminer

OBS:
A_n beregnes lige efter sidste indbetaling. Dvs saldo før der kommer rente på
Det betyder at A_1=1000

Eksempel: Jeg vil gerne spare penge op. Jeg har mulighed for at spare 1.000 kr. op hvert år.
Dem indbetaler jeg til banken den 1. jan hvert år med start 1.1.16.
I banken får jeg 5% i rente af det, som jeg har stående på kontoen.
Hvor mange penge har jeg efter 9 år, dvs. 1.1.25?
OBS: Da første indbetaling er A_1, så er 9 år efter A_{10}

$$A_{10} = 1000 \cdot \frac{(1+5\%)^{10} - 1}{5\%} \approx 12577{,}89$$

Gældsafvikling - regneark

Vi låner 20.000 kr. i banken til 10% i rente p.a. og med månedlig rentetilskrivning/termin
Hver måned betaler vi altså 1000 kr. af på lånet.
Vi vil gerne undersøge, hvornår vi har afviklet vores gæld.

Finder renten pr. måned ved at dividere den årlige rente med 12.

	A	B
1	Afvikling af gæld	
2		
3	Gæld	20000
4	Rente p.a.	10%
5	Rente pr. Måned	=B4/12

Gælden indsættes ved cellehenvisning

	A	B
1	Afvikling af gæld	
2		
3	Gæld	20000
4	Rente p.a.	10%
5	Rente pr. Måned	0,83%
6	Ydelse pr. Måned	1000
7		
8	År	Saldo start
9	jan/16	=B3

Bemærk: 1. måned afdrager man ikke samtidig med lånet stiftes, derfor sker der kun rentetilskrivning den første måned og ingen indbetaling/ydelse. Men når man laver formlen for rentetilskrivning i celle D9 tages referencen til C9 alligevel med, så formlen kan bruges længere nede i kolonnen.
Rentetilskrivningen beregnes:

	A	B	C	D
1	Afvikling af gæld			
2				
3	Gæld	20000		
4	Rente p.a.	10%		
5	Rente pr. Måned	0,83%		
6	Ydelse pr. Måned	1000		
7				
8	År	Saldo start	Indbetaling 1. jan	Rentetilskrivning
9	jan/16	20000,00		=$B$5*(B9-C9)

Tryk *Enter* og derefter kan du trække i celle D9

Saldo slut beregnes:

8	År	Saldo start	Indbetaling 1. jan	Rentetilskrivning	Saldo slut
9	jan/16	20000,00		166,67	=B9-C9+D9

Tryk *Enter* og derefter kan du trække i celle E9

Saldo start feb/16 er lig saldo slut jan/16

8	År	Saldo start	Indbetaling 1. jan	Rentetilskrivning	Saldo slut
9	jan/16	20000,00		166,67	20166,67
10	feb/16	=E9	1000,00	159,72	19326,39

Tryk *Enter* og derefter kan du trække i celle B10

Nu ser det dynamiske regneark sådan ud:

	A	B	C	D	E
1	Afvikling af gæld				
2					
3	Gæld	20000			
4	Rente p.a.	10%			
5	Rente pr. Måned	0,83%			
6	Ydelse pr. Måned	1000			
7					
8	År	Saldo start	Indbetaling 1. jan	Rentetilskrivning	Saldo slut
9	jan/16	20000,00		166,67	20166,67
10	feb/16	20166,67	1000,00	159,72	19326,39
11	mar/16	19326,39	1000,00	152,72	18479,11
12	apr/16	18479,11	1000,00	145,66	17624,77
13	maj/16	17624,77	1000,00	138,54	16763,31
14	jun/16	16763,31	1000,00	131,36	15894,67
15	jul/16	15894,67	1000,00	124,12	15018,79
16	aug/16	15018,79	1000,00	116,82	14135,61
17	sep/16	14135,61	1000,00	109,46	13245,08
18	okt/16	13245,08	1000,00	102,04	12347,12
19	nov/16	12347,12	1000,00	94,56	11441,68
20	dec/16	11441,68	1000,00	87,01	10528,69
21	jan/17	10528,69	1000,00	79,41	9608,10
22	feb/17	9608,10	1000,00	71,73	8679,83
23	mar/17	8679,83	1000,00	64,00	7743,83
24	apr/17	7743,83	1000,00	56,20	6800,03
25	maj/17	6800,03	1000,00	48,33	5848,36
26	jun/17	5848,36	1000,00	40,40	4888,77
27	jul/17	4888,77	1000,00	32,41	3921,17
28	aug/17	3921,17	1000,00	24,34	2945,52
29	sep/17	2945,52	1000,00	16,21	1961,73
30	okt/17	1961,73	1000,00	8,01	969,74
31	nov/17	969,74	1000,00	-0,25	-30,51
32	dec/17	-30,51	1000,00	-8,59	-1039,10

Og vi kan aflæse, at i nov/17 afvikles vores gæld på de 20.000 kr.

Lån (annuitetslån) Formel

$$Gæld = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

y=ydelsen
r=renten
n=antal terminer

Gældsformlen kan benyttes, når man vil kende et låns størrelse og man ved, hvor meget man kan betale pr. termin, antallet af terminer og renten.

Eksempel: Vi kan afdrage 1000 kr. pr. måned i 22 måneder til en rente på 10% p.a. dvs. $\frac{10\%}{12} = 0{,}83\%\ pr.måned$ (og med månedlig rentetilskrivning.)
Vi vil gerne undersøge, hvor meget vi kan låne.

$$Gæld = 1000 \cdot \frac{1-\left(1+\frac{10}{12}\%\right)^{-22}}{\frac{10}{12}\%} \approx 20025{,}21$$

Målsøgning

Målsøgning kan bruges til at finde fx et bestemt beløb på et bestemt tidspunkt. Det kræver dog, at man har lavet et dynamisk regneark, hvor cellerne refererer til hinanden.

Eksempel:
Jeg vil gerne til OL i år 2032. Derfor vil jeg gerne have 50 000 kr. på min konto. 31. dec. 3031.
Her er en nyttig funktionen i Excel målsøgning. Med målsøgning kan man f.eks. angive, at man ønsker en saldo pr. 31. dec. 2031 på 50.000 kr. og at Excel skal tilpasse indbetalingerne. Derefter vil indbetalingerne blive tilpasset, således at man har 50.000 kr. på denne dato.

Se video:
https://www.youtube.com/watch?v=XHxCnoUxuQA&feature=youtu.be&hd=1

Hvad er ÅOP?

ÅOP står for **Å**rlig **O**mkostning i **P**rocent.

Man bruger ÅOP som en sammenligningsfaktor mellem 2 forskellige lån. Man kan sige, at ÅOP har lidt samme funktion, som når supermarkeder angiver kilo- eller literpris på varer, så man har lettere ved at sammenligne forskellige varer.

ÅOP medtager alle omkostningerne ved lånet. Det kan være stiftelsesudgifter, gebyr på lån, administrationsgebyr, renter og andre udgifter, der hænger sammen med lånet.

Umiddelbart er ÅOP større jo kortere lånetid, da udgifterne udover selve lånet skal beregnes over en kortere periode. Derfor kommer omkostningerne ved lånet til at "fylde mere" i ÅOP.

Sammenligning af 3 forskellige forbrugslån.

	Banklån	SMSlån	Butikslån
Rente	9%	0%	0%
Omkostninger og gebyrer	1500	1050	781
Ydelse	297	6050	484
ÅOP	43%	21%	33%
Lånebeløb	5000	5000	5000
Låneperioder	24	1	12

Beregning af ÅOP

ÅOP er svært at beregne. I mange tilfælde bliver det kun en tilnærmet værdi, da renter i banker oftest bliver beregnet kvartalsvis, mens betalingerne er månedlige. Her er det normalt en computer, der udfører beregningen.

Andre lån beregnes med månedlig rente og månedlig ydelse. Så her kan vi beregne ÅOP med større præcision. Men det er stadigvæk kun en tilnærmet værdi.

For at kunne beregne ÅOP skal man kende oplysningerne i boks1 ellers skal man beregne ydelsen selv via oplysningerne i boks 2.

Boks 1	Boks 2
Lånebeløb	Renten p.a. eller pr. periode
Ydelse	Lånebeløb
Løbetid (antal perioder)	Låneomkostninger og eller gebyrer

Kender man boks 1, så kan man altså spring videre til trin 2.

Trin 1(Når man skal finde ydelsen først)

Beregn ydelsen

Ydelsen beregnes ud fra følgende formel: $ydelse = \frac{hovedstol \cdot rente\%}{1-(1+rente\%)^{-n}}$

Hovedstol: lånebeløbet + låneomkostninger og lånegebyr.
Rente: renten pr. periode som decimaltal.
Det vil sige at 10% enten skrives i formlen som ”10% eller ”0,1”
Er renten i p.a. er formlen: $\frac{rente\ i\ p.a.}{antal\ perioder\ om\ året}$
n: Antal perioder lånet betales over. (60 perioder = 5 år, ved månedlige betalinger)

Eksempel til beregning af ydelsen.
Lånebeløb: 5000 kr.
Gebyr på oprettelse: 500 kr.
Rente: 12 % p.a. med månedlige ydelser.
Tilbagebetales over 2 år.

$$\frac{5500 \cdot 1\%}{1-(1+1\%)^{-24}} \approx 258{,}9041$$

Ydelsen er 258,91 kr. om måneden

Gæld	5500
Rente p.a.	12%
Rente pr. termin	1,00%
Ydelse pr. termin	258,91

Termin	Saldo start termin	Indbetaling start termin	Rentetilskrivning	Saldo slut termin
0	5500,00		55,00	5555,00
1	5555,00	258,91	52,96	5349,05
2	5349,05	258,91	50,90	5141,04
3	5141,04	258,91	48,82	4930,95
4	4930,95	258,91	46,72	4718,76
5	4718,76	258,91	44,60	4504,45
6	4504,45	258,91	42,46	4288,00
7	4288,00	258,91	40,29	4069,38
8	4069,38	258,91	38,10	3848,57
9	3848,57	258,91	35,90	3625,56
10	3625,56	258,91	33,67	3400,32
11	3400,32	258,91	31,41	3172,82
12	3172,82	258,91	29,14	2943,05
13	2943,05	258,91	26,84	2710,98
14	2710,98	258,91	24,52	2476,59
15	2476,59	258,91	22,18	2239,86
16	2239,86	258,91	19,81	2000,76
17	2000,76	258,91	17,42	1759,27
18	1759,27	258,91	15,00	1515,36
19	1515,36	258,91	12,56	1269,01
20	1269,01	258,91	10,10	1020,21
21	1020,21	258,91	7,61	768,91
22	768,91	258,91	5,10	515,10
23	515,10	258,91	2,56	258,75
24	258,75	258,91	0,00	-0,16

Til venstre er en tilbagebetalingsplan når, man betaler 1% om måneden i rente.

OBS. Ydelsen betales sidste i perioden. (Efter rentetilskrivning)

Trin 2: (Når man kender ydelsen)

Nu skal renten findes, så der står 0 kr. i saldo efter sidste ydelse.
Ydelsen indeholder både de skjulte udgifter og renten.
For at beregne ÅOP, så skrives der nu i saldo kun det faktiske lånebeløb.
Mens ydelsen reelt er beregnet udfra lånebeløb + udgifter.

Vi skal nu finde "Den faktiske omkostningsprocent"[2] pr. periode så vi ender på 0 kr. i periode 24.

Periode	Primo saldo	Ydelse	Rente	Ultimo Saldo
0	Kr. 5.000		?	Kr. 5.000
1	Kr. 5.000	kr. 258,91	?	?
2		kr. 258,91	?	?
…		kr. 258,91	?	?
24		kr. 258,91	?	0

Den faktiske omkostningsprocent beregnes ud fra følgende formel.

$$ydelse = \frac{Udbetalt\ lån \cdot x}{1-(1+x)^{-n}}$$

Udbetalt lån: Det rene lån uden udgifter/andre omkostninger
x : Den faktiske omkostningsprocent vi skal finde (da vi ikke kender den, er den sat til x)
n: antal perioder i alt
ydelse: Det man indbetaler pr. periode. (Det der dækker renter og afdrag)

Eksempel

Lån uden udgifter: 5000 (uden de 500 kr. i udgifter)
x: ubekendt som decimaltal
n: 24
ydelse = 258,9041 (som beregnet tidligere ud fra de 5500 kr.)

$$\frac{5000 \cdot x}{1-(1+x)^{-24}} = 258{,}9041$$
$$x = 0{,}018169 = 1{,}81\%$$

Dette løses lettest som en ligning. Kan gøres via Wordmat/TI-nspire, http://www.wolframalpha.com/ eller CAS i GeoGebra

[2] Begrebet "Den faktiske omkostningsprocent" er ikke et officielt begreb, men det begreb vi bruger i denne opgave, da vi mener, det gør forståelsen nemmere.

Eks. fra Geogebra

CAS

1 (5000*x)/(1-(1+x)^(-24))=258.91

NBeregn: $\{x = -1.8603870318, x = 0.0181709881$

Den faktiske omkostningsprocent er derfor ca. 1,82% pr. periode.

Nu skal den faktiske omkostningsprocenten pr. periode laves om til ÅOP.
Det er ikke nok blot at gange de 1,82% med 12, for så tages der ikke hensyn til rentes rente begrebet.

Men man gør det med formlen for effektiv rente

$$(1 + renten\%)^{12} - 1$$

$$(1 + 0{,}0182)^{12} - 1 = 0{,}2416441$$

ÅOP = 24,16%

Den faktiske omkostningsprocent er beregnet udfra 1,817% pr. periode

Gæld	5000
ÅOP	24,16%
Rente pr. termin	1,817%
Ydelse pr. termin	258,91

Termin	Saldo start termin	Indbetaling start termin	Rentetilskrivning	Saldo slut termin
0	5000,00		90,85	5090,85
1	5090,85	258,91	87,80	4919,74
2	4919,74	258,91	84,69	4745,51
3	4745,51	258,91	81,52	4568,13
4	4568,13	258,91	78,30	4387,51
5	4387,51	258,91	75,02	4203,62
6	4203,62	258,91	71,68	4016,39
7	4016,39	258,91	68,27	3825,75
8	3825,75	258,91	64,81	3631,65
9	3631,65	258,91	61,28	3434,02
10	3434,02	258,91	57,69	3232,80
11	3232,80	258,91	54,04	3027,93
12	3027,93	258,91	50,31	2819,33
13	2819,33	258,91	46,52	2606,94
14	2606,94	258,91	42,66	2390,70
15	2390,70	258,91	38,73	2170,52
16	2170,52	258,91	34,73	1946,35
17	1946,35	258,91	30,66	1718,10
18	1718,10	258,91	26,51	1485,70
19	1485,70	258,91	22,29	1249,08
20	1249,08	258,91	17,99	1008,16
21	1008,16	258,91	13,61	762,87
22	762,87	258,91	9,16	513,11
23	513,11	258,91	4,62	258,82
24	258,82	258,91	0,00	-0,09

ÅOP: Formler

Trin 1: Beregn ydelsen:

$$\frac{(lånebeløb + udgifter) \cdot \frac{rente\ p.a}{12}\%}{1 - \left(1 + \frac{rente\ p.a}{12}\%\right)^{-perioder}} \approx ydelse$$

Trin 2:Beregn renten pr. periode: (løs som ligning)

$$\frac{(lånebeløb) \cdot x}{1 - (1 + x)^{-perioder}} = beregnet\ ydelse\ fra\ trin\ 1$$

Find x

Trin 3: Omregn til ÅOP:

Sæt x du lige har fundet ind i

$$(1 + x\%)^{12} - 1 = ÅOP$$

Filer

www.matematikbanken.dk/formelsamling/aaop.xlsm (Excelfil med makro)

Kombinatorik og Sandsynlighed

Kombinatorik
Kombinatorik er den gren af matematikken, som omhandler antallet at muligheder for at kombinere forskellige elementer.

Kombinatorik kan bruges som et værktøj for sandsynlighedsregningen.
De kombinationer som man finder i kombinatorikken kan bruges som udfald i sandsynlighedsregningen.

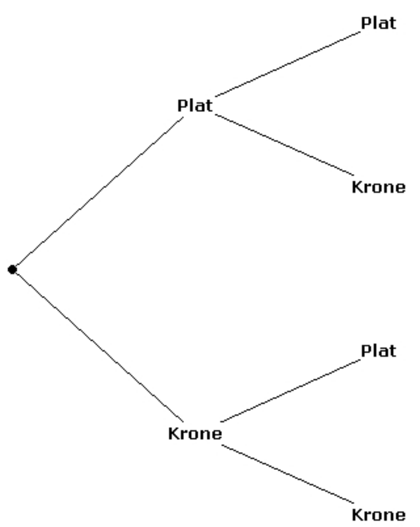
$$P(Hændelse) = \frac{gunstige\ kombinationer}{mulige\ kombinationer}$$

Tællemodeller
For at holde styr på hvilket og hvor mange kombinationer, der findes, kan det være en fordel at bruge en tællemodel.

Tælletræ
Et tælletræ er en model, som giver overblik over antallet af kombinationer.

Tælletræet fungerer på den måde, at hver gang man har en kombination, så sætter man en streg. Når tælletræet er færdig, tæller man antallet af ender på tælletræet og finder derved resultatet af opgaven.

Eks. Hvilke mulighed har man, når man "Slår plat/krone" med 2 mønter



Et godt sted at lave tælletræer er på https://www.mindmeister.com

Matrix

En anden måde at lave en model over kombinationer er en matrix. En matrix er en tabelopstilling med 2 dimensioner. I nogle tilfælde er det en fordel at lave en matrix, fordi de mulige kombinationer bliver lettere at aflæse, da de i modsætning til tælletræet står direkte i en matrix. Dog har en matrix også den svaghed, at den kun kan arbejde i 2 dimensioner. Så man kan lave en matrix over kast med 2 terninger, men ikke for 3 eller flere terninger.

Eks. Matrix for 2 kast med en mønt (Dette eksempel er med tilbagelægning)

	Plat	Krone
Plat	Plat og Plat	Plat og Krone
Krone	Krone og Plat	Krone og Krone

Ud af både tælletræ og matrix kan man aflæse at der er 4 mulige udfald. (Plat-plat, plat-krone, krone-plat og krone-krone)

Dvs. at man f.eks. kan se at der er 3 muligheder ud af de 4, hvor der er mindst 1 plat.

Begreber

”Enten eller” (Additionsprincippet)

Hvis noget er ”Enten eller”, så skal man **lægge tallene sammen**.

Eks. man har to skåle med bolde i. I den ene skål er der 2 bolde (En sort og en hvid) i den anden skål er der 3 bolde (En grøn, en blå og en rød). Hvor mange muligheder har man for at kombinere boldene, hvis man **enten** tager en bold fra skål 1 **eller** fra skål 2.

Løsning ved beregning:
Man har 2+3 muligheder = 5 muligheder

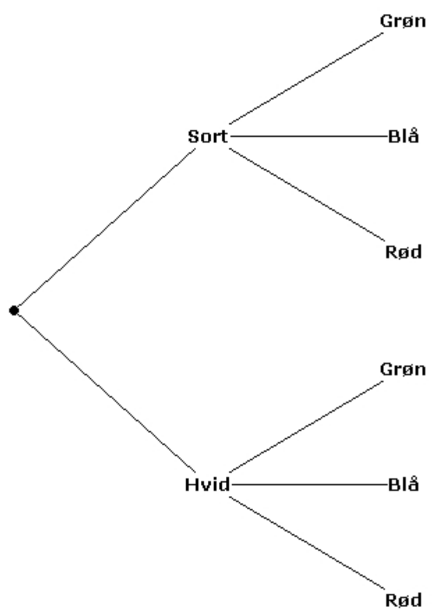
”Både og” (Multiplikationsprincippet)

Hvis noget er ”både og”, så skal man **gange tallene sammen**.

Eks. man har to skåle med bolde i. I den ene skål er der 2 bolde (En sort og en hvid) i den anden skål er der 3 bolde (En grøn, en blå og en rød). Hvor mange muligheder har man for at kombinere boldene, hvis man **både** tager en bold fra skål 1 **og** en bold fra skål 2.

Løsning ved beregning:
Man har $2 \cdot 3$ muligheder = 6 muligheder

Løsning ved tælletræ:



Som både beregning og tælletræ viser, er der 6 mulige kombinationer.

Med og uden tilbagelægning

Når man tæller antallet af kombinationer, tager man ofte stilling til, om det er med eller uden tilbagelægning.

Med tilbagelægning

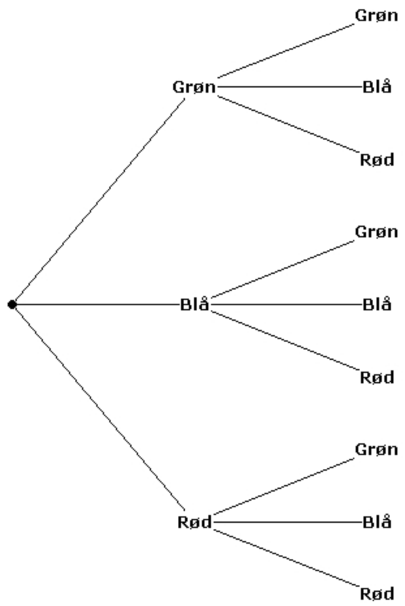
Hvis antallet af kombinationer er **med** tilbagelægning, betyder det, at mulighederne kan bruges flere gange.

Eks. 2 bolde tages op af en pose med 3 bolde i (Grøn, blå og rød). Det er med tilbagelægning

Løsning ved matrix:

	Grøn	Blå	Rød
Grøn	Grøn og Grøn	Grøn og Blå	Grøn og Rød
Blå	Blå og Grøn	Blå og Blå	Blå og Rød
Rød	Rød og Grøn	Rød og Blå	Rød og Rød

Løsning ved tælletræ:



Løsning ved beregning:

$3 \cdot 3 = 9$ muligheder

(3 muligheder for at trække den første bold. 3 muligheder for at trække nr. 2 bold.)

Som både beregning, matrix og tælletræ viser, er der 9 mulige kombinationer.

Bemærk at f.eks. den grøn bold kan komme op begge gange, man trækker en af de 3 bolde op af posen.

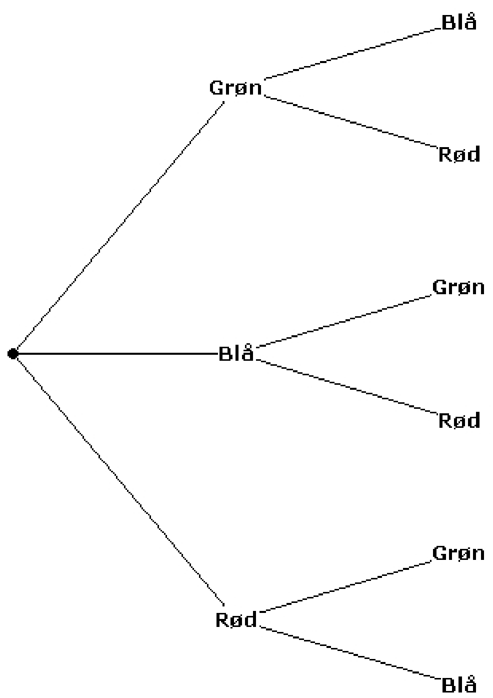
Uden tilbagelægning
Hvis antallet af kombinationer er **uden** tilbagelægning, betyder det, at mulighederne **ikke** kan bruges flere gange.

Eks. 2 bolde tages op af en pose med 3 bolde i (Grøn, blå og rød). Det er uden tilbagelægning.

Løsning via matrix

	Grøn	Blå	Rød
Grøn		Grøn og Blå	Grøn og Rød
Blå	Blå og Grøn		Blå og Rød
Rød	Rød og Grøn	Rød og Blå	

Løsning via tælletræ



Løsning via beregning:
3·2=6 muligheder (3 muligheder for at trække den første bold. Men kun 2 muligheder for at trække nr. 2 bold, da den første bold ikke bliver lagt tilbage i posen. Så den bold kan ikke trækkes igen

Som både beregning, matrix og tælletræ viser, er der 6 mulige kombinationer.

Bemærk at f.eks. den grøn bold ikke kan komme op begge gange, man trækker en af de 3 bolde op af posen.

Ordnet og uordnet kombinationer

Nogle gange kigger man også på, om de kombinationer, som man kan lave, er **ordnet** eller **uordnet.** Hvis kombinationerne er **ordnet, har rækkefølgen en betydning**. Omvendt har **rækkefølgen ikke en betydning**, hvis kombinationerne er **uordnet.**

Det vil sige at:

- hvis kombinationerne er **ordnet**, så er "ab" og "ba" to forskellige kombinationer.
- hvis kombinationerne er **uordnet**, så er "ab" og "ba" den samme kombination, fordi det er de samme bogstaver, som bare står i forskellig rækkefølge.
- Der vil altid være flest ordnede kombinationer.

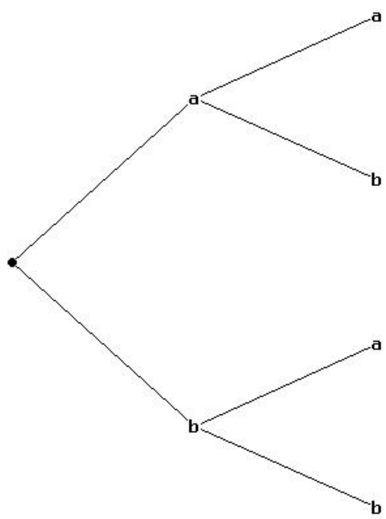
Eks. På hvor mange måde kan man kombinere bogstaverne "a" og "b"?

Hvis **orden har betydning** og **med tilbagelægning**

Løsning som matrix

	a	b
a	aa	ab
b	ba	bb

Løsning som tælletræ



Løsning som beregning:
$2 \cdot 2 = 4$ muligheder

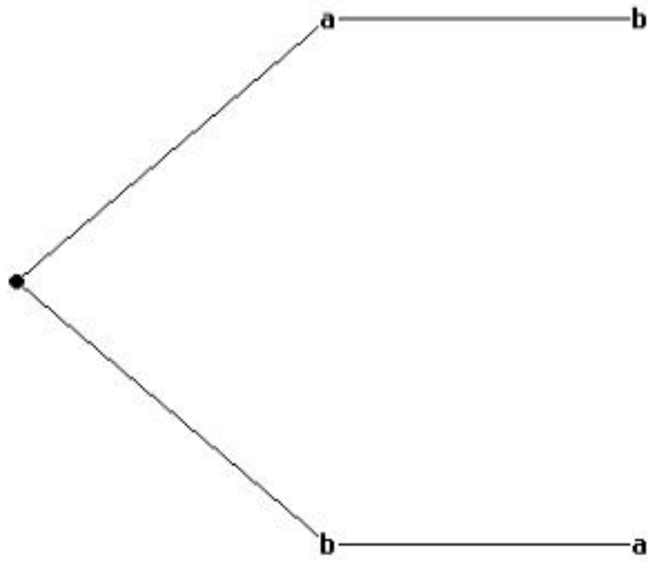
Som både beregning, matrix og tælletræ viser, er der 4 mulige kombinationer.

Hvis orden har betydning og uden tilbagelægning

Løsning som matrix

	a	b
a		ab
b	ba	

Løsning som tælletræ



Løsning som beregning:

2·1=2 muligheder

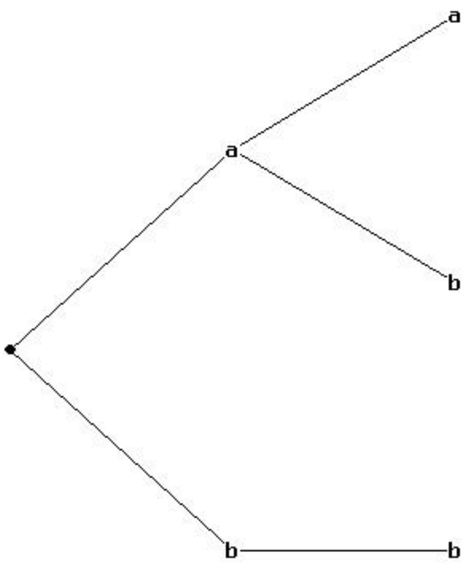
Som både beregning, matrix og tælletræ viser, er der 2 mulige kombinationer.

Hvis orden ikke har betydning og med tilbagelægning

Løsning som matrix

	a	b
a	Aa	ab
b		bb

Løsning som tælletræ

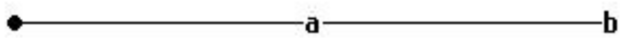


Beregning:
Beregningen er lidt speciel og vil blive vist senere

Som både matrix og tælletræ viser, er der 3 mulige kombinationer.

Hvis **orden ikke har betydning** og **uden tilbagelægning**

	A	b
a		ab
b		



Beregning:
Beregningen er lidt speciel og vil blive vist senere
Som både matrix og tælletræ viser, er der 1 mulige kombinationer.

Kombinatorik – Højt niveau

Nedenstående matrix kan bruge til forskellige kombinatoriske udregninger.
n=Antal der kan udtages fra.
r=Antal der skal udtages.

	Med tilbagelægning	**Uden tilbagelægning**
Ordnet stikprøve Rækkefølgen har betydning "ab" og "ba" er to forskellige muligheder (ab≠ba)	$$n^r$$ Eks. Et telefonnummer De 8 cifre svarer til 8 udtrækninger (r=8) I hver cifre er der 10 muligheder (n=10) $10^8 = 100.000.000$ måder kan man sammensætte et telefonnummer på. (Bruges ofte (jævnt udfaldsrum))	$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$ Eks. Der skal i en gruppe på 5 personer (n=5) laves en bestyrelse med en formand, en næstformand og en kasserer (3 udtag (r=3)). Bemærk: det er forskellige bestyrelser, hvis de tre samme personer besætter posterne som formand, næstformand og kasserer forskelligt. $P(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$ måder kan man sammensætte bestyrelsen på. (Bruges ofte (jævnt udfaldsrum))
Uordnet stikprøve Rækkefølgen har IKKE betydning **"ab" og "ba" tæller kun som en mulighed (ab=ba)**	$$A(n,r) = \frac{(n+r-1)!}{r! \cdot (n-1)!}$$ $$A(n,r) = K(n+r-1,r)$$ Eks. I Maier slår man med 2 terninger(r=2), hvor der er 6 sider på (n=6). Hvor mange forskellige kombinationer kan man lave? (Begge terninger kastes på en gang, så rækkefølgen er uden betydning) $A(6,2) = K((6+2-1),2) = K(7,2) = 21\ udfald$ (Bruges næsten aldrig, da **muligheder ikke er lige sandsynlige** (Ujævnt udfaldsrum))	$$K(n,r) = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$ Eks. Der skal ud af en gruppe på 5 personer (n=5) sammensættes et udvalg på 3 personer. (r=3) $K(5,3) = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!}$=10 måder kan man sammensætte udvalget på. (Bruges ofte (jævnt udfaldsrum))

Eksempel

Hvis man skal kombinere to bogstaver og har bogstaverne a, b og c til rådighed, har man følgende muligheder:

	Med tilbagelægning	Uden tilbagelægning
Ordnet stikprøve Rækkefølgen har betydning "ab" og "ba" er to forskellige muligheder (ab≠ba)	Eks. aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc $3^2 = 9\ måder$	Eks. ~~aa~~, ab, ac, ba, ~~bb~~, bc, ca, cb, ~~cc~~ $P(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!} = 6\ måder$
Uordnet stikprøve Rækkefølgen har IKKE betydning "ab" og "ba" tæller kun som en mulighed (ab=ba)	Eks. aa, ab, ac, ~~ba~~, bb, bc, ~~ca~~, ~~cb~~, cc $A(n,r) = \frac{(3+2-1)!}{2! \cdot (3-1)!} = 6$ måder $A(n,r) = K(3+2-1,2) = 6\ måder$ Bemærk: at aa (med 2 ens bogstaver) kan kombineres på 1 måde, mens ab (2 forskellige bogstaver) kan kombineres på to måder (ab ba). MEN begge dele tæller kun som en mulighed her. (Ujævnt udfaldsrum)	Eks. ~~aa~~, ab, ac, ~~ba~~, ~~bb~~, bc, ~~ca~~, ~~cb~~, ~~cc~~ $K(3,2) = \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} = 3\ måder$

Tastevejledning:

Lommeregner (TI-30X IIB og TI-30XB MultiView):

3!: "3"→"PRB"→Vælg "!" med piletaster→"Enter"→"Enter"
P(3,2): "3"→"PRB"→Vælg "nPr" med piletaster→"Enter"→"2"→"Enter"
K(3,2): "3"→"PRB"→Vælg "nCr" med piletaster→"Enter"→"2"→"Enter"

Computerprogrammer:

MathCad: 3!: ”3!” P(3,2): ”permut(3,2)” K(3,2): ”combin(3,2)”	**Excel (dansk):** 3!: ”FAKULTET(3)” P(3,2): ”PERMUT(3;2)” K(3,2): ”KOMBIN(3,2)”	**GeoGebra** 3!:”3!” P(3,2): ”nPr[3,2]” K(3,2): ”nCr[3,2]”
TI-InterActive: 3!: ”3!” P(3,2): ”nPr(3,2)” K(3,2): ”nCr(3,2)”	**Wolframalpha** :http://www.wolframalpha.com/ 3!: I inputfeltet skrives: ”3!” P(3,2) I inputfeltet skrives: ”P(3,2)” K(3,2) I inputfeltet skrives: ”C(3,2)”	

Sandsynlighed

Sandsynlighed bruges til at kunne forudsige noget om fremtiden for at en bestemt hændelse sker.

Umiddelbart kan vi inddele sandsynlighed i **to former**.

Statistisk sandsynlighed

Statistisk sandsynlighed bygger på data vi finder. Enten noget der er opsamlet eller noget vi eksperimentere os frem til

Allerede opsamlet data

Her finder man sandsynligheden for en hændelse ved at kigge på en statistik.

- Eks.: Statistisk set har hver 5 skoleelev en smartphone med knækket glas. Derfor er sandsynligheden for den *hændelse,* at en tilfældig elev har en ødelagt skærm, $\frac{1}{5}$, 20 % eller 0,2. (Man bestemmer selv, hvordan man angiver sandsynligheden)

Eksperimentel sandsynlighed

En anden form for statistisk sandsynlighed er, at man eksperimenterer sig frem til sandsynligheden.

Kombinatorisk sandsynlighed

I den kombinatorisk sandsynlighed ”regner” man sig frem til en sandsynlighed ud fra de mulige udfald, som der er.

- Eks. Ved en alm. terning er der mulighed for 6 udfald $\{1,2,3,4,5,6\}$. Sandsynlighed for hændelsen at slå et lige tal er altså 3 $\{2,4,6\}$ud af 6 mulige udfald. Derfor er sandsynligheden for hændelsen et lige tal: $\frac{1}{2}$, 50 % eller 0,5.

Udfaldsrum:

Dette er alle de mulige udfald der er.

- Eks.
    - Udfaldsrummet for en alm. terning er $\{1,2,3,4,5,6\}$
- I forbindelse med udfaldsrum snakker man ofte om
    - ”Et **jævnt** udfaldsrum” hvor der er lige stor sandsynlighed for alle udfald
        - Eks. en alm. terning med 6 lige store sider.
    - ”Et **ujævnt** udfaldsrum” hvor der ikke er lige stor sandsynlighed for alle udfald.
        - Eks. ”Vinde i lotto” eller ”Ikke vinde i lotto”. Der er meget større sandsynlighed for, at man ”ikke vinder” end for at man ”vinder”.
    - Det ”ujævne udfaldsrum” er sværere at regne på.

Hændelse:

Dette er det eller de udfald, som man har fokus på. En hændelse kan bestå af både et og flere udfald.

- Eks.

    - En hændelse kunne være at slå en ”2’er” eller at ”samfundsfag” bliver udtrukket.
    - Men det kunne også være at slå ”et lige tal” med en alm. terning, som er udfaldene $\{2,4,6\}$
- I forbindelse med hændelser snakker man ind i mellem om
    - ”En sikker hændelse” er et udfald, som man er sikker på vil komme.
        - Eks. at slå mindre end 7 med en alm. terning.
            - Ved en sikker hændelse vil sandsynligheden være 1 eller 100 %
    - ”En umulig hændelse” er et udfald, som aldrig vil komme.
        - Eks. at slå en 7’er med en alm. terning.
            - Ved en umulig hændelse vil sandsynligheden være 0

Gunstige udfald:
Dette er de udfald i vores udfaldsrum, som passer til vores hændelse.
- Eks. Hvis vi vil undersøge sandsynligheden for hændelsen ”et ulige tal” i udfaldsrummet $\{1,2,3,4,5,6\}$, vil de gunstige udfald være $\{1,3,5\}$.

Beregning af sandsynligheden
Når man skal regne sig frem til en sandsynlighed for en hændelse, bruger man formlen:

$$P(hændelse) = \frac{antal\ gunstige\ udfald}{udfaldsrum}$$

I formlen ovenfor står P for ”sandsynligheden” for en hændelse. P står for det engelske ord **probability**.

- Eks. Sandsynligheden for hændelsen at slå en 2’er med en alm. terning skrives og beregnes således:

$$P(2) = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\% \approx 0{,}167$$

- Eks. Sandsynligheden for hændelsen at slå et ”lige tal” med en alm. terning skrives og beregnes således:

$$P(lige\ tal) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\% = 0{,}5$$

Eksperimenter
Nogle gange kan det være svært, at beregne sig frem til en sandsynlighed. I disse tilfælde vil man ofte kunne finde et tilnærmet resultat ved at lave et eksperiment. Resultatet vil ofte være brugbart men sjældent 100% præcist.

De store tals lov
Teorien bagved de store tals lov er, jo flere gange man udføre et eksperiment - Jo tættere vil man komme på den faktiske sandsynlighed.

Simulation

Når man skal udføre eksperimenter i forbindelse med sandsynlighed, kan det være en fordel, at kunne lave en simulation i regneark.

I denne video https://www.youtube.com/watch?v=CqBLvp9v1-s&feature=youtu.be&hd=1 vises et eksempel på, hvordan man kan opbygge en simulering.

Formler der bruges:
=SLUMP.MELLEM(1;6)
=TÆL.HVIS(område;kriterier)
Trykker man på **F9**, får man en ny simulering, hvilket svarer til et nyt eksperiment (kast)
(Husk at man kan låse en celle ved at trykke **F4** på en Windows-computer eller **cmd+t** på en Mac.)

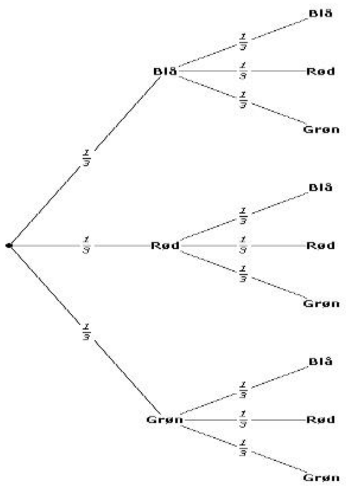
Sammensat sandsynlighed

Ind i mellem har man behov for at finde sandsynligheden for en hændelse, hvor to udfald hænger sammen.

Eks.
Et lykkehjul har tre felter (Blå, rød og grøn). Felterne er lige store, hvilket betyder, at det er et jævnt udfaldsrum.

Hvad er sandsynligheden for, at lykkehjulet stopper på den blå to gange i træk?

Tælletræ



Her kan man sige, at sandsynligheden for at stoppe på en blå i første runde er $\frac{1}{3}$
Sandsynligheden for at stoppe på en blå i anden runde er $\frac{1}{3}$. Da lykkehjulet både skal stoppe på en blå i først og anden runde skal disse to sandsynligheder ganges med hinanden.

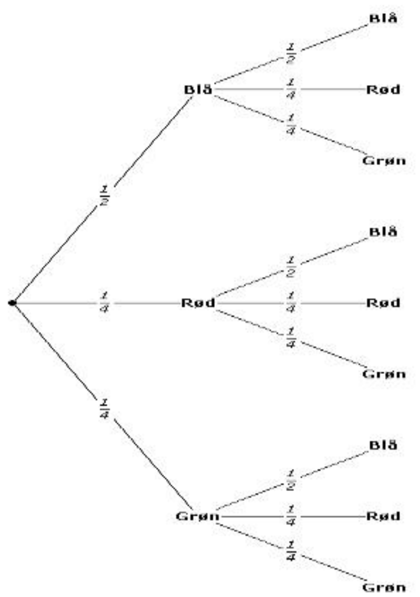
Så regnestykket bliver:$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
Sandsynligheden er altså $\frac{1}{9}$ for at stoppe på blå to gange i træk.

Ujævnt udfaldsrum

Nogle gange er udfaldsrummet ikke jævnt. Hvilket betyder, at sandsynlighederne for forskellige udfald ikke er lige store.

Eks.
Et lykkehjul har tre felter (Blå, rød og grøn). Felterne er IKKE lige store, hvilket betyder, at det er et ujævnt udfaldsrum.

Hvad er sandsynligheden for, at lykkehjulet stopper på den blå to gange i træk?



Da sandsynligheden for en blå i hver omgang er $\frac{1}{2}$, bliver regnestykket: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Bemærk:

At her kan man ikke længere tælle grenene i tælletræet, men er nødt til at kigge på, hvad der står på grenene!

Modsat hændelse (Komplementær hændelse)

Nogle gange er det lettere at finde ud af "sandsynligheden for at en hændelse ikke sker" end et er at finde "sandsynligheden for at en hændelse sker". Når man finder en "modsatte" hændelse, siger man, at man finder "en komplementær hændelse".

Eks.

Hvad er sandsynligheden for at slå mindst en 6 i kast.

I første omgang finder vi ud af, hvad er sandsynligheden for ingen af de 3 kast er 6'ere.

alP(ingen 6'ere) = $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$

Det vil sige, at 125 ud af de 216 forskellige kombinationer, som er mulige i forbindelse med 3 kast med en almindelig terning, indeholder IKKE en eller flere 6'ere. Derfor må der være (216-125=91) 91 kombinationer, som indeholder mindst en 6'er. Derfor er sandsynligheden for, at slå mindst en 6'er i 3 slag.

P(mindst en 6'er) =$\frac{216}{216} - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} \approx 0{,}423 \approx 42{,}3\%$

Andre funktioner

Ligefrem og omvendt proportionale funktioner

Ligefrem proportional:

Når en funktion er ligefrem proportional, betyder det, at x-værdierne og værdierne op af y-aksen (f.eks. f(x)) ”følger” hinanden.

At en funktion er ligefrem proportional, betyder at:
- Når x-værdien **fordobles** → så **fordobles** f(x)-værdien også
- Når x-værdien **halveres** → så **halveres** f(x)-værdien også
- Når f(x)-værdien **fordobles** → så **fordobles** x-værdien også
- Når f(x)-værdien **halveres** → så **halveres** x-værdien også

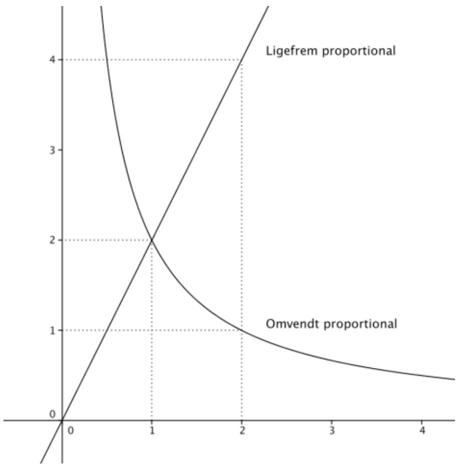
En førstegradsfunktion er ligefrem proportional, hvis funktionen skær y-aksen i (0,0). Det vil sige, hvis b=0. Så forskriften skal være på formen: $f(x) = ax + 0$ som ofte bare skrives som $f(x) = ax$
Grafen har form som en ret linje

Omvendt proportional:

Når en funktion er omvendt proportional, betyder det, at x-værdierne og værdierne op af y-aksen (f.eks. f(x)) ”reagerer” modsat af hinanden.

At en funktion er omvendt proportional betyder at:

- Når x-værdien **fordobles** → så **halveres** f(x)-værdien også
- Når x-værdien **halveres** → så **fordobles** f(x)-værdien også
- Når f(x)-værdien **fordobles** → så **halveres** x-værdien også
- Når f(x)-værdien **halveres** → så **fordobles** x-værdien også



En funktion er omvendt proportional, hvis den har forskriften $f(x) = \frac{a}{x}$, hvor a≠0
Nogen gange skrives funktionen som $x \cdot f(x) = a$ eller $f(x) = a \cdot x^{-1}$
Grafen har form som en hyperbel.

Bemærk:
På den **ligefrem proportionale funktion**, når vil går fra x-værdien 1 til x-værdien 2, vil værdien på y-aksen gå fra 2 til 4. Altså her medfører en fordobling af x-værdierne, at værdierne på y-aksen også fordobles.

På den **omvendt proportionale funktion**, når vil går fra x-værdien 1 til x-værdien 2, vil værdien på y-aksen gå fra 2 til 1. Altså her medfører en fordobling af x-værdierne, at værdierne på y-aksen også halveres.

Kender du et punkt på hyperblen, så kan du finde forskriften

$$f(x) = \frac{x_1 \cdot y_1}{x}$$

Du kender punktet (2,3)

$$f(x) = \frac{2 \cdot 3}{x}$$

$$f(x) = \frac{6}{x}$$

2. gradsfunktioner (parabel)

Det er en 2. gradsfunktion, fordi x er opløftet i 2. potens (og der er ikke x'er som er opløftet i højere potenser)

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Hvis a er større end 0, så vil grenene vender opad ☺

Hvis a er mindre end 0, så vil grenene vender nedad ☹

Jo mindre a-værdi, jo bredere bliver grafen.

Jo større a-værdi, jo smallere bliver grafen

Hvis b-værdien er 0 eller ikke er tilstede i forskriften ligger toppunktet på y-aksen.

Hvis a- og b-værdien har **samme** fortegne (+a og +b eller -a og -b), så ligger toppunktet til **venstre** for y-aksen.

Hvis a- og b-værdien har **forskellige** fortegne (+a og -b eller -a og +b), så ligger toppunktet til **højre** for y-aksen.

C fortæller, hvor grafen skærer y-aksen

Formler til beregning

Diskriminant $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

Toppunkt: $x = \frac{-b}{2 \cdot a}$ & $y = \frac{-D}{4 \cdot a}$

Ekstremum

Nulpunkter: $D < 0 \rightarrow ingen\ løsninger$

Dvs. grafen ikke skærer x-aksen

$D = 0 \rightarrow 1\ løsning$

Dvs. toppunktet ligger på x-aksen

$x = \frac{-b+\sqrt{D}}{2 \cdot a}$

$D > 0 \rightarrow 2\ løsninger$

Dvs. grafen skærer x-aksen 2 steder

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2 \cdot a}$ & $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2 \cdot a}$

Rod

Eksempel: $f(x) = x^2 + 2x - 2$

a= 1, b=2 og c=-2

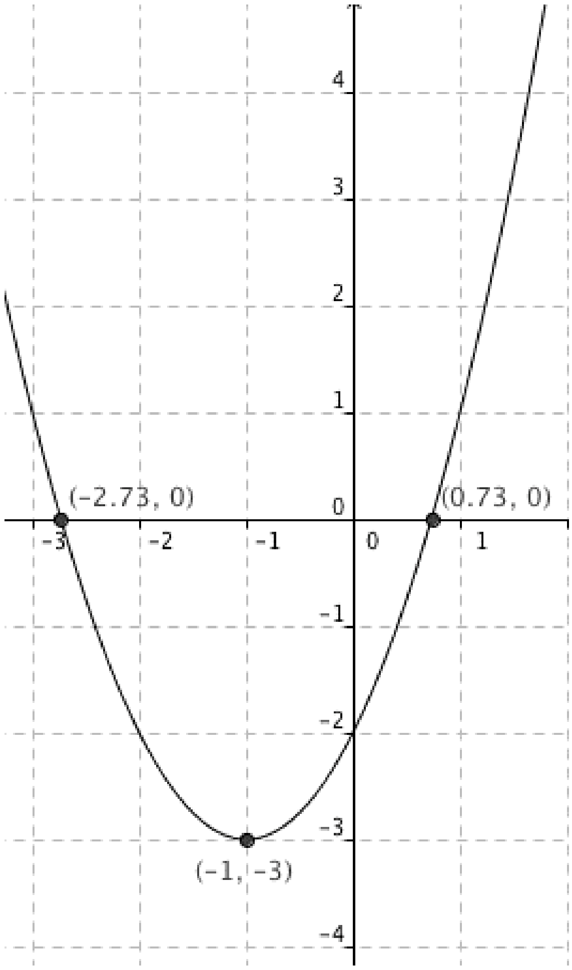
Diskriminant

$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for D vha. CAS-værktøjet WordMatMac.*

$D = 12$

Dvs. D er større end 0 og dermed er der 2 skæringer med x-aksen



Toppunkt (Ekstremum)

x-koordinat:

$$x = -\frac{2}{2 \cdot 1}$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMatMac.*

$x = -1$

y-koordinat:

$$y = \frac{-12}{4 \cdot 1}$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for y vha. CAS-værktøjet WordMatMac.*

$y = -3$

Dvs. toppunktet hedder (x,y) = (-1,-3)

Nulpunkter (rod)

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{12}}{2 \cdot 1}$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x1 vha. CAS-værktøjet WordMatMac.*

$x_1 = 0{,}732050808$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{12}}{2 \cdot 1}$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x2 vha. CAS-værktøjet WordMatMac.*

$x_2 = -2{,}732051$

Dvs. grafen skærer x-aksen i x=0,73 og i x=-2,73

VIGTIGT:
Når I har beregnet/fundet nulpunkter og toppunkt vha. GeoGebra, så SKAL I forholde jer til, hvad de har af betydning, for den opgave der er stillet!

Tid - Omregning mellem sekunder, minutter og timer

Gange med 60 →

time	min	sek

← Dividere med 60

Bemærk
Vær altid opmærksom på decimaltal i forhold til timer.
1,5 time er IKKE det samme som 1 time og 50 min.
1,5 time er 1 og en halv time, hvilket vil sige 1 time og 30 min.

Begrebet Decimaltimer
Decimaltimer er når tiden er skrevet som decimaltal. F.eks. kan 1 time og 30 min. skrives som 1,5 time.
1,5 time er 1 og en halv time, hvilket vil sige 1 time og 30 min.

Omsætning fra decimaltimer til minutter
Her skal man gange decimaltimerne med 60 (fordi der er 60 min. på en time)

1,5 time skal omsættes til min.
$1{,}5 \cdot 60 = 90$
Så bliver det 90 minutter

Omsætning fra minutter til decimaltimer:

Her skal man dividere minutterne med 60 (fordi der er 60 min. på en time)

75 min. skal omsættes til decimaltimer.
$$\frac{75}{60} = 1{,}25$$
Så bliver det 1,25 decimaltime

Omsætning fra decimaltimer til timer og minutter
Her skal man lade de hele timer stå og derefter gange decimaltimerne minus de hele timer med 60.

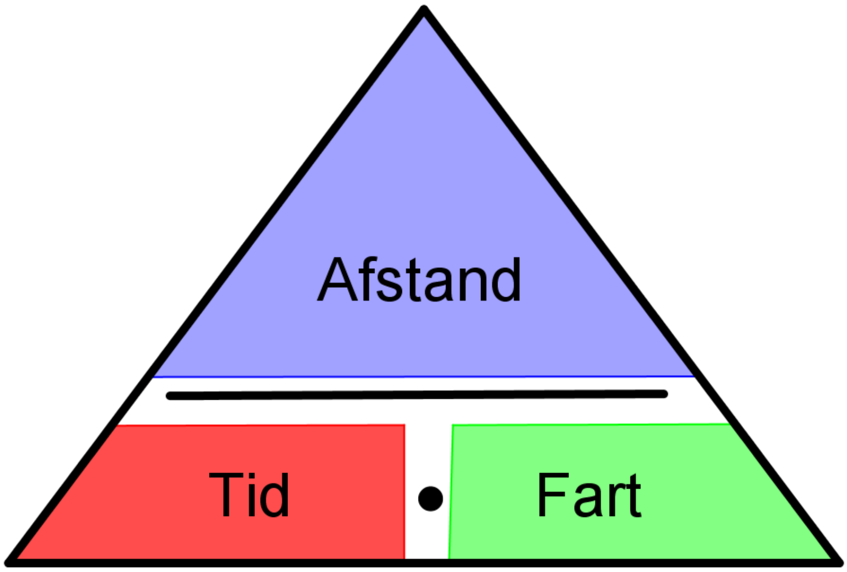
1,6 time skal laves om til timer og minutter
$(1{,}6-1)\cdot 60 \approx 36$
Så bliver det 1 time og 36 min.

Omsætning fra timer og minutter til decimaltimer
Her skal man lade de hele timer stå og derefter dividere minutterne med 60.

1 time og 45 min. skal laves om til decimaltimer.
$45/60=0{,}75$
Så bliver det 1,75 decimaltime

Fart

Fart er et udtryk for hvor lang tid, det har taget at tilbagelægge en given afstand.



$$Fart = \frac{afstand}{tid} \qquad Tid = \frac{afstand}{fart} \qquad Afstand = fart \cdot tid$$

HUSK enhederne skal passe - fx km, timer og km/t

Omregning

km/t → m/s ved at dividere med 3,6
m/s → km/t ved at gange med 3,6

Eksempel på omregning fra km/t til m/sek. og omvendt:

m/s→km/t

$Omregn\ 10\frac{m}{s}\ til\ \frac{km}{t}$:

$$10 \cdot 3{,}6 = 36\frac{km}{t}$$

km/t→m/s

$Omregn\ 36\frac{km}{t}\ til\ \frac{m}{s}$:

$$\frac{36}{3{,}6} = 10\frac{m}{s}$$

Beregning af afstand:

$$Afstand = fart \cdot tid$$

Vi ved at en bil bevæger sig med 40 km/t og det tager 30 min.
30 min omregnet til decimaltimer: $\frac{30}{60} = \frac{1}{2} = 0{,}5t$

$$\boldsymbol{Afstand = 0,5\ t\ \cdot 40\frac{km}{t} = 20km}$$

Beregning af farten:

$$Fart = \frac{afstand}{tid}$$

Vi ved at en cyklist cykler 5 km på 20 min.
20 min omregnet til decimaltimer: $\frac{20}{60} = \frac{1}{3} = 0{,}333t$

$$\boldsymbol{fart = \frac{5km}{0,33t} = 15\frac{km}{t}}$$

Beregning af tiden:

$$Tid = \frac{afstand}{fart}$$

Hvis man går med 5 m/s, hvor lang tid tager det så at tilbagelægge 1,5 km
Omregning af km til m: 1,5·1000 = 1500 m

$$tid = \frac{1500m}{5\frac{m}{s}} = 300 \cdot s$$

De 300 sekunder kan efterfølgende laves om til minutter:

$$\frac{300}{60} = 5 \text{ min}$$

Omregning af 5000 sek. til timer, minutter og sekunder:

Først finder vi ud af, hvor lang tid vi har i minutter:

$$\frac{5000}{60} = 83{,}33\ min$$

Hvor at finde antal hele timer dividere vi med 60 (60 min. på en hel time)

$$\frac{83{,}33}{60} \approx 1{,}388833$$

Så vi har 1 hel time.

For at finde antal hele minutter ganger vi det, som er udover hele timer, med 60 (da der er 60 minutter på en time). Her er det 0,388833

$$0{,}388833 \cdot 60 = 23{,}32998$$

Så vi har 23 hele minutter.

For at finde antal sekunder ganger vi det, som er udover hele minutter, med 60 (da der er 60 sekunder på et minut). Her er det 0,32998

$$60 \cdot 0{,}33 \approx 20$$

Så vi har 20 sekunder

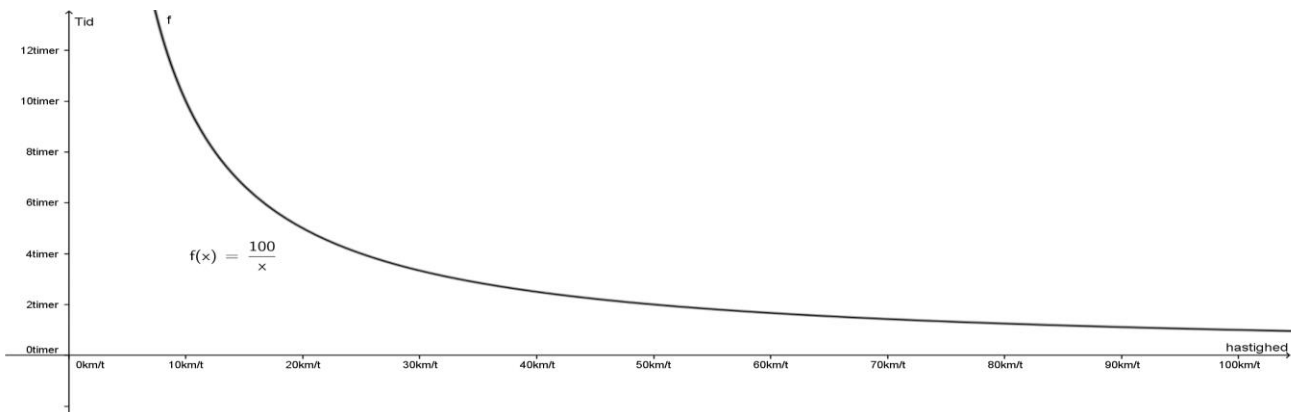
Så alt i alt har vi 1 time, 23 minutter og 20 sekunder, hvis vi har 5000 sekunder.

Grafisk afbildning af hastighedens betydning

Hvilken betydning har farten for tiden ved en strækning på 100 km

$f(x) = \frac{100km}{x\frac{km}{t}}$, x:=farten i km/t; f(x):= tiden i timer

Denne funktion er omvendt proportional



Acceleration

Acceleration er ændring af hastigheden pr. tidsenhed eller den matematiske tidsafledede af hastigheden.

Den afledte SI-enhed for acceleration er m/s^2.

Tyngdeaccelerationen er ca. 9,81 m/s^2 i Danmark.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Δ betyder ændringer i

Eller omskrevet, så er accelerationen lig ændringer i hastigheden divideret med ændringer i tiden.

Eksempel

En bil kan accelerer fra 0km/t til 100km/t på 4,5 sek.

$$accelrationen = \frac{100\frac{km}{t} - \frac{0km}{t}}{4{,}5s - 0s} = \frac{100}{4{,}5} = 6{,}173\frac{m}{s^2}$$

Det betyder så at for hvert sekund der går - så øger bilen sin hastighed med yderligere 6,173 m/s. (22.22 km/t)

Dvs. at bilen

efter 1 s. har en hastighed på 22,22 km/t

efter 2 s. har en hastighed på 44,44 km/t

efter 3 s. har en hastighed på 66,66 km/t

efter 4 s. har en hastighed på 88,88 km/t

efter 4,5 s. har en hastighed på 100 km/t

2. eksempel

Se video med Usain Bolt, som løber 100 m på 9,58 sek.
https://www.youtube.com/watch?v=3nbjhpcZ9_g

Se tiderne for løbet, fordelt på intervaller, længere nede

Jeg kan se at i interval nr. 7 har han en hastighed på 44,44 km/t
I interval nr. 8 har en hastighed på 43,90 - Han har altså løbet dette interval langsommere end nr. 7. Så vi har altså en negativ acceleration.

Acceleration for interval 8 er $\frac{12{,}2-12{,}35}{0{,}82} = -0{,}1829\,\frac{m}{s^2}$

Vi kan også se, at i interval nr. 2 sker den største acceleration.
Han ændrer hastigheden fra 19,05 km/t til 36,36 km/t på 0,99 sek.

Acceleration for interval 2 er $\frac{10{,}1-5{,}29}{0{,}99} = 4{,}859\,\frac{m}{s^2}$

Interval nr.	Tid fra start i sek.	Tid pr. interval	Længde fra start i m	Hastigheden for intervallet i m/sek.	Hastighed for intervallet i km/t	Accelerationen
0	0	0	0			
1	1,89	1,89	10,0000	5,29	19,05	2,8
2	2,88	0,99	20,0000	10,10	36,36	4,86
3	3,78	0,9	30,0000	11,11	40,00	1,12
4	4,64	0,86	40,0000	11,63	41,86	0,6
5	5,47	0,83	50,0000	12,05	43,37	0,51
6	6,29	0,82	60,0000	12,20	43,90	0,18
7	7,1	0,81	70,0000	12,35	44,44	0,19
8	7,92	0,82	80,0000	12,20	43,90	-0,18
9	8,75	0,83	90,0000	12,05	43,37	-0,18
10	9,58	0,83	100,0000	12,05	43,37	0

3. eksempel

En bil kører 72 km/t og bringes til standsning på 3 sek. Hvad er den negative acceleration?

Ændring i hastighed er 72 km/t til 0 km/t = 72 km/t
72 km/t omregnes til m/s (Der dividerer med 3,6) 72 km/t svarer til 20m/s

Farten ændres på 3 sek. Accelerationen må så være

Accelerationen er $\frac{0-20}{3} \approx -6{,}666667\,\frac{m}{s^2}$

Den negative acceleration skal som minimum være $\frac{5m}{s^2}$ for at overholde lovkravet til bremserne.

Alkohol

Så meget er en genstand

En genstand indeholder 12 gram rent alkohol. Dette svarer til 1,5 cl. ren alkohol.
I en almindelig øl er der 1 genstand.

Formler

Så lang tid er du om at forbrænde en genstand

$F = 0{,}12 \cdot x \cdot t$
F = Antal gram forbrændt alkohol
x = Din vægt i kg.
t = Antal timer siden den første genstand

Sådan regner du promillen ud.

Kvinde	
Når man kender gram alkohol	Når man kender antal genstande
$\dfrac{\boldsymbol{Gram\ alkohol}}{\boldsymbol{0,55 \cdot Vægt}} = \boldsymbol{Promille}$	$\dfrac{Genstand\ \cdot 12}{0{,}55 \cdot Vægt} = Promille$
Mand	
Når man kender gram alkohol	Når man kender antal genstande
$\dfrac{\boldsymbol{Gram\ alkohol}}{\boldsymbol{0,68 \cdot Vægt}} = \boldsymbol{Promille}$	$\dfrac{Genstand\ \cdot 12}{0{,}68 \cdot Vægt} = Promille$

Sådan regner du antal genstandene ud i flaske

På flere flasker er alkoholindholdet både oplyst i procent og antal genstande. Hvis ikke, kan du finde frem til antallet af genstande ved at regne ud, hvor meget ren alkohol flasken indeholder. Du ved at massefylden for ren alkohol er $0{,}8\frac{g}{cm^3}$ eller $0{,}8\frac{g}{mL}$

OBS		
$\boldsymbol{cm^3 = mL}$	$12\ gram\ alkohol = 15\ mL\ alkohol$	$33\ cL = 330\ mL = 0{,}33\ L = 3{,}3\ dL$

Hvad og styrke	Finder hvor meget der er ren alkohol	Antal genstande
0,75 liter Gajol 16,6%	$750 \cdot 16{,}6\% = 124{,}5ml$	$\frac{124{,}5}{15} = 8{,}3$
0,75 liter Gajol 16,6%	$750 \cdot 16{,}6\% \cdot 0{,}8\frac{g}{cm^3} \approx 99{,}6\text{gram}$	$\frac{99{,}6}{12} \approx 8{,}3$
0,75 liter Gajol 32,5%	$750 \cdot 32{,}5\% \cdot 0{,}8 = 195\text{gram}$	$\frac{195}{12} = 16{,}25$
0,75 liter Vodka 40%	$750 \cdot 40\% \cdot 0{,}8 = 240\ gram$	$\frac{240}{12} = 20$
2 cl. Vodka 40%	$20 \cdot 40\% \cdot 0{,}8 = 6{,}4gram$	$\frac{6{,}4}{12} \approx 0{,}5333333$
2 cl. Gajol 16,6%	$20 \cdot 16{,}6\% \cdot 0{,}8 = 2{,}656gram$	$\frac{2{,}656}{12} \approx 0{,}2213333$

Sådan finder du styrken af hjemmelavet drinks

OBS: Omregner alt til ml. først. Derefter kan man bruge massefylde-formlerne til at omregne til gram.

Sodavand med vodka

Mængde væske uden alkohol	20 cl sodavand
Mængde væske med alkohol	2 cl 40%
Mængde væske i alt	22 cl
Mængde alkohol	$20mL \cdot 40\% = 8\ mL$
Styrke	$\frac{8mL}{220mL} \approx 3{,}63\%$
Antal genstande	$\frac{8 \cdot 0{,}8}{12} \approx 0{,}5$ genstande

Bowle

Mængde væske uden alkohol	1 liter juice
Mængde væske med alkohol	0,5L vodka 40%
Mængde væske i alt	1,5L = 1500mL
Mængde alkohol	$500mL \cdot 40\% = 200\ mL$
Styrke	$\frac{200mL}{1500mL} \approx 13{,}33\%$
Antal genstande	$\frac{200 \cdot 0{,}8}{12} \approx 13{,}3$ genstande

Long Island Iste

Mængde væske uden alkohol	2 dL
Mængde væske med alkohol	8 cl. 35%
Mængde væske i alt	28cL
Mængde alkohol	$8\ \cdot 35\% = 2{,}8\ cL$
Styrke	$\frac{2{,}8cL}{28cL} \approx 10\%$
Antal genstande	$\frac{28 \cdot 0{,}8}{12} \approx 1{,}9$ genstande

Som tommelfingerregel kan du i øvrigt regne med, at der er en genstand i:

1 alm. øl (33 cl)
1 glas vin (12 cl)
1 glas hedvin (8 cl)
1 glas spiritus (4 cl)

1 guldøl indeholder ca. 1¼ genstand
1 flaskevin (75 cl) indeholder ca. 6 genstande
1 flaskespiritus (70 cl) indeholder ca. 18 - 20 genstande

Promillen ved indtagelse af en genstand

Alt efter hvor meget man vejer, påvirkes man forskelligt. Som tommelfingerregel kan du regne med at 1 genstand giver disse promiller:

	Kvinde			Mand		
Vægt	Promille	Tid om at forbrænde genstanden	Antal genstande forbrændt på en time	Promille	Tid om at forbrænde genstanden	Antal genstande forbrændt på en time
50 kg	0,44‰	Ca. 120 min	0,5	0,35‰	Ca. 120 min	0,5
60 kg	0,36‰	Ca. 100 min	0,6	0,29‰	Ca. 100 min	0,6
70 kg	0,31‰	Ca. 86 min	0,7	0,25‰	Ca. 86 min	0,7
80 kg	0,27‰	Ca. 75 min	0,8	0,22‰	Ca. 75 min	0,8
90 kg	0,24‰	Ca. 67 min	0,9	0,20‰	Ca. 67 min	0,9
100 kg	0,22‰	Ca. 60 min	1	0,18‰	Ca. 60 min	1

Som man kan se af ovenstående skema:

- Har det stor betydning, om man er mand eller kvinde i forhold til den promille, som man får, når man indtager alkohol.
- Har vægten stor betydning i forhold til den tid, det tager for kroppen at forbrænde den alkohol, som man har drukket.

Promille	Kroppens reaktion
0,2	Øjets evne til hurtigt at fokusere og omstille sig fra lys til mørke forringes.
0,5	Evnen til på en gang at opfatte situationer og samtidig udføre præcise bevægelser begynder at forringes. Synsvinklen indsnævres.
0,8	Nedsat koordinationsevne og øget reaktionstid.
1,0	Opmærksomheden og koncentrationsevnen er svækket, begyndende træthedssymptomer og nedsat balance- og bevægelsesevne.
1,5	Udtalt forringet bevægelsesevne og talebesvær. Centralnervesystemet har fået nok - og maven sikkert også.
2,0	Udtalte forgiftningssymptomer. Selvkontrollen er helt væk.
3,0	Manglende kontrol med fx urinblæren, evt. bevidstløshed.
4.0	Bevidstløs. Livsfare

Alkohol i kroppen

$$genstande \cdot 12 - 0{,}12 \cdot vægt \cdot t = gram\ alkohol$$

genstande = Antal genstande du har drukket i løbet af t timer
vægt = Din vægt i kg.
t = timer du har drukket
gram alkohol = den mængde alkohol, du har tilbage i kroppen målt i gram

Funktion der viser promille i timerne efter, at man er stoppet med drikke alkohol

Mand: $f(x) = \frac{gram\ alkohol - 0{,}12 \cdot vægt \cdot x}{0{,}68 \cdot vægt}$

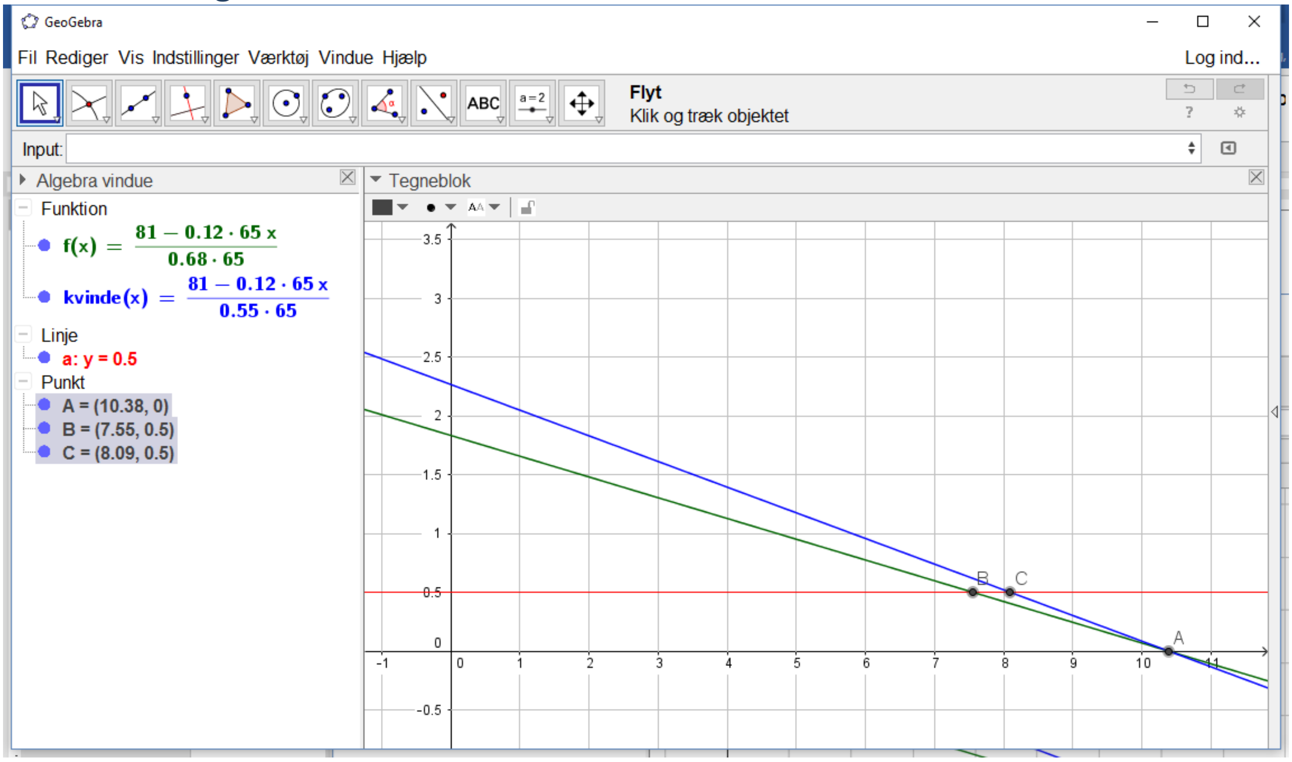
Kvinde: $g(x) = \frac{gram\ alkohol - 0{,}12 \cdot vægt \cdot x}{0{,}55 \cdot vægt}$

gram alkohol = den mængde alkohol i gram, som man har tilbage fra den tidligere formel
x = timer

Eks:
En mand og en kvinde som begge vejer 65 kg har hver drukket 10 genstande i løbet af en aften fra 19 - 24. Hvornår må de køre bil igen. Dvs. de har en promille på under 0,5?

Mand	Kvinde
$10 \cdot 12 - 0{,}12 \cdot 65 \cdot 5 = 81$ Efter 5 timer han personen stadig 81 gram alkohol tilbage i kroppen. $\frac{81 - 0{,}12 \cdot 65 \cdot x}{0{,}68 \cdot 65} < 0{,}5$ *Uligheden løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.* $x > 7{,}551282$ Efter 7,55 timer $0{,}55 \cdot 60 = 33$ Efter 7 timer og 33 min har manden en promille under 0,5	$10 \cdot 12 - 0{,}12 \cdot 65 \cdot 5 = 81$ Efter 5 timer han personen stadig 81 gram alkohol tilbage i kroppen. $\frac{81 - 0{,}12 \cdot 65 \cdot x}{0{,}55 \cdot 65} < 0{,}5$ *Uligheden løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.* $x > 8{,}092949$ Efter 8,1 timer $0{,}1 \cdot 60 = 6$ Efter 8 timer og 6 min har kvinden en promille under 0,5

Grafisk løsning



Ud fra grafen kan man se, at kvinden har en større promille end manden, og at manden må køre bil før kvinden må. Men efter 10,38 timer, har de begge en promille på nul. Det skyldes at de vejer lige meget og har drukket samme mængde alkohol

Programmer

GeoGebra

Komma
Bruges til koordinatsæt. Koordinatsæt skrives (x,y)

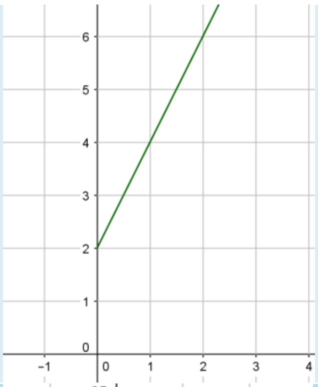
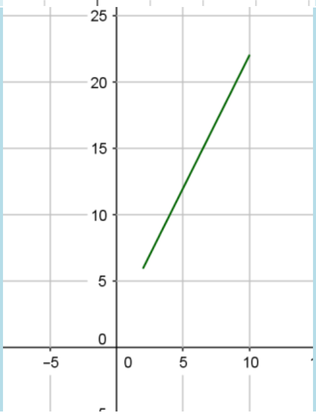
Punktum
Bruges til decimaler fx $\frac{1}{2} = 0.5$

Funktioner
Funktioner skrives som 2x+5. Så kan GeoGebra regne med funktionen f.eks. finde hældning

Boksplot (når man kender 1.,2. og 3. kvartil, mindste- og størsteværdi)

Vigtige kommandoer i GeoGebra

Kommando	Effekt	Eksempel
Boksplot[<yOffset>, <ySkalering>, <Start Værdi>, <Q1>, <Median>, <Q3>, <Slut værdi>]	Kan tegne et boksplot ud fra mindsteværdi, kvartilsæt og størsteværdi	Boksplot[1,0.5,1,2,5,7,8]
Skæring[<Objekt>, <Objekt>]	Skæring mellem to objekter	Skæring[f,r]
FitVækst[<liste med punkter>]	Tegner den bedst mulige vækstfunktion ud fra punkter	FitVækst[A,B,C]
FitLinje[<liste med punkter>]	Tegner den bedst mulige rette linje ud fra punkter	FitLinje[A,B,C]
FitPoly[<liste med punkter>, <grad>]	Tegner den bedst mulige funktion ud fra punkter og grad	FitPoly[A,B,C,2]
FitPot[<liste med punkter>]	Tegner den bedst mulige potensfunktion ud fra punkter (Kan bruges til omvendt proportionalitet)	FitPot[A,B,C]
FitExp[<liste med punkter>]	Tegner den bedst mulige ekspotentielle funktion ud fra punkter	FitExp[A,B,C]
Funktion[<Funktion>, <Start x-Værdi>, <Slut x-Værdi>]	Kan ”afskære” en funktion til et interval	Funktion[f(x), 0,10]
Ekstremum[<Polynomium>]	Kan finde toppunkt	Ekstremum[f(x)]
Rod[<Polynomium>]	Kan finde nulpunkter	Rod[f(x)]
Polynomium[<Liste med Punkter>]	Kan ud fra punkter tegne en funktion	Polynomium[A,B,C]

f(x)=2x+2,x>0	Afgrænser en funktion, så den kun viser værdier større end 0	
f(x)=2x+2,2<x<10	Viser værdier mellem 2 og 10	

Se flere tips til GeoGebra på
http://www.matematikbanken.dk/page/enkel/t/434

Excel
http://www.matematikbanken.dk/page/enkel/Excelkompendium/198

WordMat
http://www.matematikbanken.dk/page/enkel/WordMat%20vejledning/411

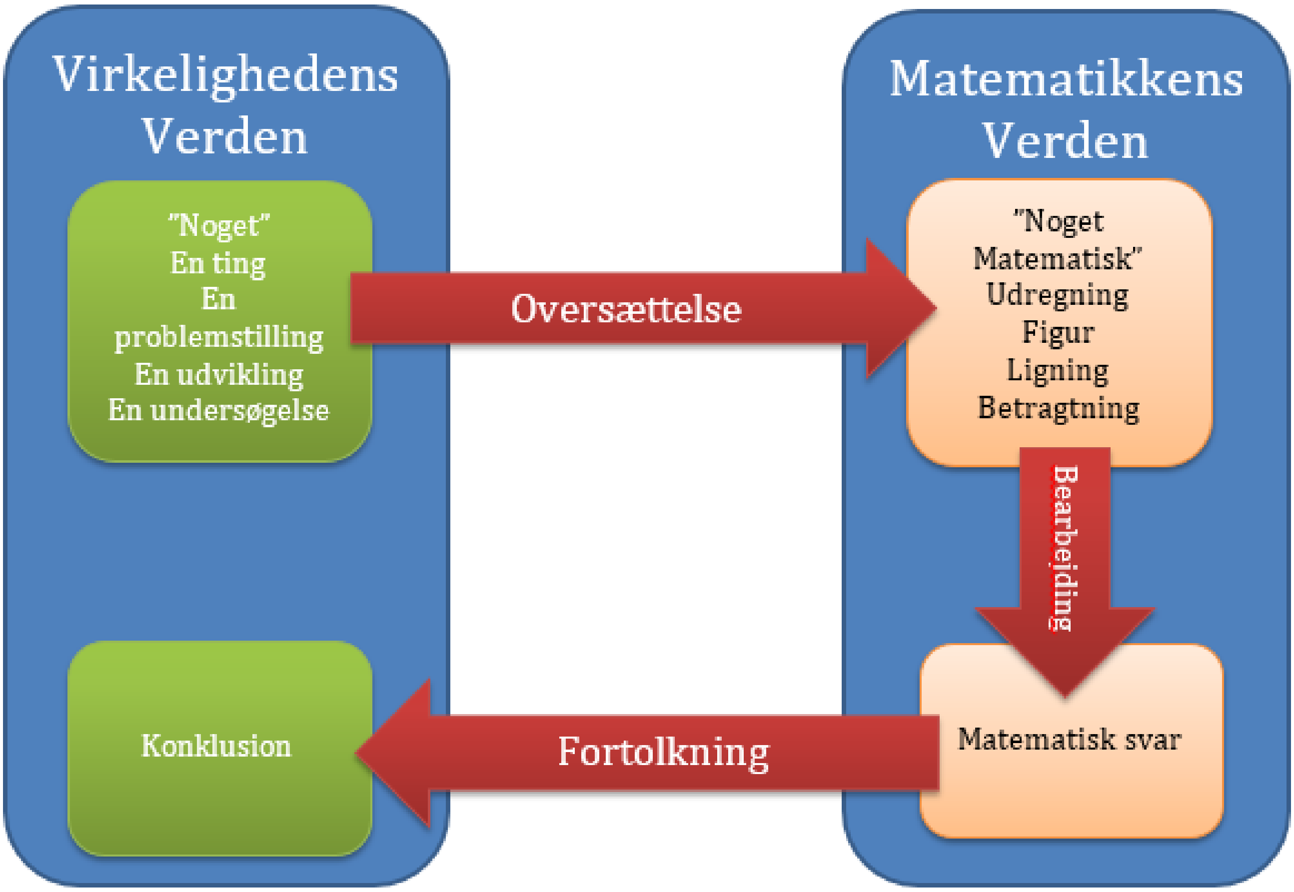
GeoGebra
http://www.matematikbanken.dk/page/enkel/omdirigeret/153

Onlineværktøjer
http://www.wolframalpha.com/
https://www.fastfig.com/

Kommunikation i skriftlig matematik med hjælpemidler

Opsætning i WordMat

Indskrivning med henblik på god kommunikationsværdi (orden)



Opgavenummer Hvad skal jeg undersøge: Omsætte til matematisk udregning=matematisk facit **Omsættes til et svar, som giver mening for læseren. (en konklusion indeholdende en matematisk forståelse)**

Om layout.
Det skal tydeligt fremgå, hvilken opgave man løser (opgavenummer)
Det skal tydeligt fremgå, hvad man skal finde ud af. (En opgavetekst - ikke over en linje)
Der skal være en tegning og/eller beregning og/eller betragtning og/eller forklaring
Der skal være et matematisk facit
Der skal være en konklusion. Med et **passende** antal decimaler.
Det skal tydeligt fremgå hvad der er konklusionen **(FED, farvet boks, farvet baggrund)**
3 deling af opgaven og dobbeltstreger under facit er en gammel mulighed, da man ikke havde de layoutmuligheder, som man har i dag. (Det betragtes dog ikke som forkert, hvis man alligevel gør det)

Eksempel på hvordan indskrivning kan se ud

6.1 Rumfanget af kassen er:

$$10 \cdot 12 \cdot 15 = 1800$$

Rumfanget af kassen er 1800m^3

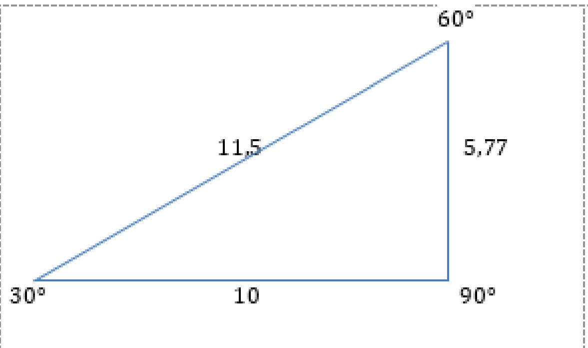
6.2 Er gennemsnitsalderen på håndboldholdet over 16 år?

$$\frac{15+15+16+17+15+16+17}{7} = \frac{111}{7} = 15{,}85714$$

Nej gennemsnitsalderen er ikke over 16 år, som Peter hævder, men 15,86 år

6.3 Hvad er højden på flagstangen

WordMat's trekantsløser anvendes med input: A = 30°, C = 90° , b = 10



A = 30°
B = 60°
C = 90°

a = 5,773503
b = 10
c = 11,54701

Vinkel B findes vha. vinkelsum = 180° i en trekant

$$B = 180° - A - C = 180° - 30° - 90° = 60°$$

Længden af siden a findes vha. tangens

$$a = b \cdot \tan(A) = 10 \cdot \tan(30) = 5{,}773503$$

Længden af siden c findes vha. cosinus

$$c = \frac{b}{\cos(A)} = \frac{10}{\cos(30)} = 11{,}54701$$

Højden på flagstangen må derfor være ca. 5,8 meter høj

Kompetencer

Tankegangskompetence	At kunne udøve matematisk tankegang
Problembehandlingskompetence	At kunne formulere og løse matematiske problemer
Modelleringskompetence	At kunne analysere og skabe matematiske modeller
Ræsonnementskompetence	At kunne ræsonnere matematisk
Repræsentationskompetence	At kunne håndtere forskellige repræsentationer af matematiske sagsforhold
Symbolbehandlingskompetence	At kunne håndtere matematisk symbolsprog og formalisme
Kommunikationskompetence	At kunne kommunikere i, med og om matematik
Hjælpemiddelkompetence	At kunne betjene sig af og forholde sig til hjælpemidler for matematisk virksomhed, herunder it.

Problembehandlingskompetencen

- Hvordan I formulere/opstiller det problem I skal løse
- Hvordan I løser problemet - evt. på flere måder
- Hvordan I går til problemet

Tankegangskompetencen

- Hvordan I bruger de matematiske tankegange.
- At kende til hvilke type spørgsmål, der er gode at stille sig selv og hinanden i matematik
- At kunne forstå andres tanker
- At kunne generalisere, fx regler eller sammenhænge på baggrund af resultater eller flere enkelttilfælde

Ræsonnementskompetencen

- At kunne opstille en slutningsrække
- At kunne opstille argumenter / hypoteser og arbejde videre på tidligere argumenter/ræsonnementer/hypoteser
- At kunne bruge fornuft og logik
- At have forståelse for, om ens resultater er rigtige
- At kunne forholde sig til et matematisk ræsonnement - fx et bevis
- At kunne bedømme og vurdere et matematisk ræsonnement

Modelleringskompetencen

- At kunne opsætte en (forenklet) model af en virkelighed - og oversætte den til matematik
- At kunne behandle en model af virkeligheden matematisk
- At kunne forstå andres modeller
- At kunne strukturere matematik
- At kunne analysere matematik
- At kunne undersøge matematik
- At kunne kommunikere om/forklare modellen

Hjælpemiddelkompetencen

- At vælge det rigtige hjælpemiddel (værktøj)
- At kunne bruges sit hjælpemiddel (passer, IT, computer, lineal mv)
- At vide, hvornår et hjælpemiddel kan være godt at bruge og hvornår det ikke er brugbart

Kommunikationskompetencen

- At kunne udtrykke sig matematisk
- At kunne forstå andres matematiske kommunikation

Symbolbehandlingskompetencen

- At kunne forstå og anvende symboler
- At kunne omsætte mellem dagligsprog og matematisk sprog
- At kunne bruge formler
- At kunne forklare former
- At kunne lave jeres egne formler

Repræsentationskompetencen

- At kunne afkode forskellige matematiske repræsentationer
- At kunne fortolke forskellige matematiske repræsentationer
- At kunne skelne forskellige matematiske repræsentationer
- At kunne vise flere forskellige matematiske repræsentationer
- At kunne betjene forskellige matematiske repræsentationer
- At kunne forstå forskellige matematiske repræsentationer

PROBLEMBEHANDLINGSKOMPETENCEN

Få overblik

- Hvilke oplysninger har vi?
  - Kan oplysningerne samles på en skitse?
- Hvilken ”form” har svaret på opgaven? F.eks.: En tegning? En tekst? Et tal? En tabel?

Vi fik overblik

Vi fik ikke lagt en plan.
Kan vi få et bedre overblik?

Læg plan

- Hvilke dele af matematikken skal vi bruge?
  - F.eks. Geometri? Statistik? Ligningsløsning?
- Kan problemstillingen i opgaven opdeles i flere dele?
- Hvilke hjælpemidler kan vi bruge for at løse problemstillingen?
  - F.eks.: Computer? Tegnetrekant? Passer? Formelsamling?
- Har vi mulighed for at hente viden?
  - F.eks.: Formelsamling? Notater? Tidligere opgaver?
- Skal vi lave en model og/eller et et ræsonnement?
- Kan vi sammensætte viden til en plan/løsningsstrategi?
  - I hvilken rækkefølge skal vores viden sammensættes?

Vi fik lagt en plan

Vi løste ikke opgaven.
Kan vi lægge en ny plan?

Løs problemstillingen

- Brug den plan, som vi har lagt

Vi fik løs problemstillingen

Løsning giver ikke mening.
Har vi fulgt planen?

Kontroller løsning

- Giver løsningen mening i forhold til problemstilling i opgaven?
  - Har løsningen den ”form”, som vi forventede?
  - Er løsningen realistisk i forhold til ”Den virkelige verden”?

Problemløsning

De 4 trin

- **Få overblik**
    - Hvad er problemstillingen?
    - Hvad er målet, når jeg løser den?
    - Hvad ved jeg?
- **Læg plan**
    - Hvordan vil jeg løse problemstillingen?
- **Løse opgaven**
    - Brug af metode til at løse opgaven
- **Kontrol af løsning**
    - Giver den løsning, som er fundet, mening i forhold til problemstillingen?

Få overblik:

- Læs opgaven meget grundigt
    - Ligger der et skjult hint eller en oplysning, som du skal bruge til noget?
    - Er der et mønster i oplysningerne?
- Hvad er problemet?
    - Evt. tegne problemstillingen som en skitse
    - Evt. nedskriv de oplysninger, du har fået (huske mål, enheder mv.)
    - Evt. redegør for andre (f.eks. i en gruppe), hvad problemstillingen er.
        - Dette kan ofte give nye vinkler på problemstillingen
        - Hvis I skal samarbejde om en opgave, er det vigtigt, at I har en fælles forståelse.
- Hvor ligger matematikken henne i problemstillingen?
- Hvilket vil jeg gerne finde frem til, når jeg løser problemstillingen

Læg plan:

- Hvilken type af matematik skal der bruges for at løse problemstillingen
    - Brøkregning: Ofte hvor noget er delt i mindre stykker end en hel.
    - Funktioner: Ofte hvor der er en sammenhæng, der skal undersøges.
    - Ligninger: Ofte hvor du kender alle oplysninger på nær en.
    - Geometri/trigonometri: Ofte når der er nogle figurer i problemstillingen.
    - Statistik: Ofte hvor et talmateriale skal undersøges.
    - Kombinatorik: Ofte hvor man skal finde antallet af muligheder/måder at gøre tingene på.
    - Sandsynlighed: Ofte hvor man skal vurdere om noget kan lade sig gøre eller ej/ eller om det er en god ide.
    - Logik: Hvad siger den umiddelbare fornemmelse?
    - Eller noget helt andet?
- Hvilke oplysninger har jeg brug for at løse opgaven
    - Har jeg disse oplysninger?
    - Kan jeg finde disse oplysninger?
- Hvilke hjælpemidler kan jeg bruge
    - Tegneredskaber
    - IT
- Kan jeg arbejde baglæns?
- Kan et evt. mønster i oplysninger bruges til noget?
- Kan jeg lave en model?
- Hvilke formler hører til emnet?
- Har jeg prøvet et lignende problem før, hvad gjorde jeg der?
- Opstil en hypotese for, hvordan jeg kan løse problemet
    - Undersøg at denne hypotese, kan give svar på den problemstilling, som er i opgaven
    - Mangler du oplysninger, så søg om der er andre oplysninger, du måske kan finde af omveje, ved evt. at bruge mere viden
- Kan problemet deles op i små dele?
- Lav en kort plan - skriv den ned i stikord. Hvad skal du vide først før du kan gå videre?
- Lav et kvalificeret gæt på hvad løsningen måske skal være

Løse opgaven

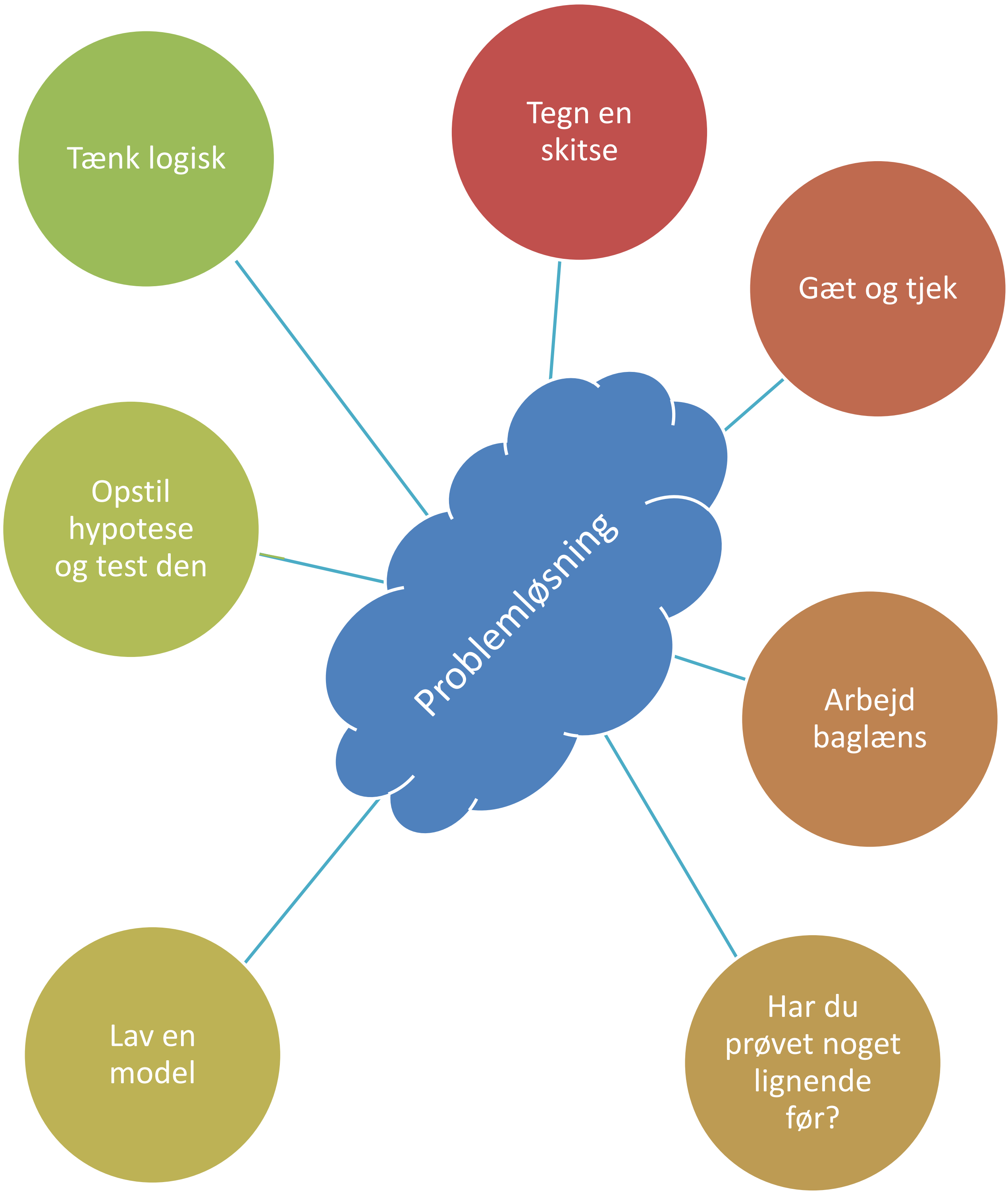
- Holder jeg mig til den plan, jeg har lagt, når jeg går i gang med de enkelte dele?
- Giver de enkelte dele af løsningen mening i løbet af processen op til den samlede løsning af problemstillingen?
  - Virker de resultater jeg får realistiske i forhold til det, som jeg havde forestillet mig?
- Virkede det ikke undervejs i løsningsprocessen, skal jeg måske lave en ny plan - hvor jeg bruger den nye viden, som jeg fik i første forsøg.

Kontrol af løsning

- Passer løsningen til problemstillingen?
- Virkede det? Kan problemet løses på andre måder?
  - Hvis flere måder giver det samme resultat, så er det mere sandsynligt, at du har regnet rigtigt.
- Hvis man har regnet baglæns, så regn forlæns og se om det giver det forventede resultat.
  - Løser du en ligning, så kan du altid sætte det beregnede ind på x's plads.

OBS: Det, at en antagelse eller påstand holder, er ikke altid et egentligt bevis, da det godt kan være et enkelttilfælde

- Eks. Kan en antagelse om at den indskrevne og omskrevne cirkel har samme centrum godt holde, hvis man arbejder med en ligesidet trekant…men det er ikke et bevis for at det gælder i alle trekanter…hvilket det ikke gør!
- Nogen gange kan forkaste et bevis, ved at lave et modbevis. Altså en løsning som ikke passer med hypotesen.


Tænk logisk
Tegn en skitse
Gæt og tjek
Opstil hypotese og test den
Problemløsning
Arbejd baglæns
Lav en model
Har du prøvet noget lignende før?

Ordliste

Afdrag (ved lån)
Den del af ydelsen, som lånet falder med, kalder man afdrag. Et lån stiger med en vis rente. En ydelse ved lån består af afdrag+rente

Afgør
Sammenligne tal eller diagrammer, og konkludere noget på det

Aflang
Noget som er længere end det er bred.

Aflæs
Find noget på tegning, tabel eller diagrammer

Afmærk
Marker på tegning eller diagram

Afrunding
Afrunding er når man fjerner decimaler fra et tal.

Afstand
Længden af den rette linje, som man kan tegne mellem to punkter.

Algebra
Algebra er en område i matematikken, hvor man regner med både tal og bogstaver.

Bogstaverne indgår som variabler for tal, hvilket vil sige, at bogstaverne erstatter tal, som man ikke kender.

Ofte møder man algebra i forbindelse med reduktion og ligninger.

Annuitet
En række lige store ydelser (indbetalinger)

Bag
Bag når en ting er bag en anden ting, er den efter den anden ting.

Bagefter
Bagefter betyder, at en ting eller tal følger efter en anden ting eller tal.

Bagved
Bagved er efter: 5 står bagved eller efter 4. Eller når man står i en kø i en forretning.

Beregn
Her skal du lave en beregning med regnestykker for at komme frem til resultatet

Beskriv
Giv en fyldestgørende forklaring på den matematiske problemstilling. Brug resultater og diagrammer som udgangspunkt for din beskrivelse

Bestem
Aflæs, beregn, tegn for at løse opgaven

Blandet tal
Et blandet tal er et tal, som består af et helt tal og en brøk

Ciffer
Et ciffer er et symbol, som enkeltstående eller i sammenhænge med andre cifre repræsenterer tal i et talsystem.

Faktorer
Faktorer er de tal der er adskilt af et gangetegn

Fakultet
Fakultet er i matematikken produktet af en talrække af de positive hele tal fra 1 til og med tallet selv. Fakultet-funktionen angives med et udråbstegn efter tallet, f.eks. 5!.
Et tal som er resultatet af en fakultet-funktion kaldes et fakultetstal.
Eks. $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Forhold
Hvordan to eller flere størrelser er sammenlignet med hinanden.

Fx er er forholdet mellem 10 og 5, at 10 er dobbelt så stort som 5 og 5 er halvt så stort som ti. Det kan man udtrykke som 2:1 - eller 1:2 alt efter hvilket man sammenligner med.

Forholdet findes ved at dividere det ene tal med det andet. $\frac{a}{b} = forhold$

Forskel
Man finder en forskel ved at trække to størrelser fra hinanden.
Fx mellem 5 og 10. Der er en forskel på 5

$$a - b = forskel$$

a er det største tal

Gennemsnit
Gennemsnittet eller middeltallet er det tal, som man får, hvis man lægger alle observationer sammen og dividerer dette tal med antallet af observationer.

Grundflade
Grundflade er arealet af det en figur kan stå på. Grundfladen kan være det samme som et tværsnit, hvis figuren har samme form hele vejen op eller hen.

Kongruent
Kongruent betyder indenfor geometri ”ens”. F.eks. betyder kongruent, at 2 figurerer er nøjagtig ens. (Dvs. hvis man lagde dem oven på hinanden dækkede de hinanden fuldstændig) Den ene er altså en kopi af den anden, men kan godt være spejlet eller drejet. Det vil sige at både vinkler og sidelængder er parvis ens i de 2 figurer.

Korde
En korde er et linjestykke, der forbinder to punkter på en cirkel eller en kurve.

Kvadrattal
Et kvadrattal er et tal, hvor kvadratroden af tallet er et helt tal.
Kvadrattal fra 1 til 100
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 og 100

Multiplikation
Multiplikation er et andet ord for regnearten gange. Man kan f.eks. multiplicere 6 og 6 = 36. Når man har multipliceret hedder resultatet produktet.

Naturlige tal
Alle hele positive tal. Nul er ikke et naturligt tal.

Omregn
Omregn fra en enhed til en anden

Primtal
Et primtal er et naturligt tal, som er større end 1 og hvor kun tallet selv og 1 går op i. 2 er det mindste primtal og det eneste, som er lige.

Produkt
Et produkt er resultatet af tal, som er ganger sammen.

Sammenlign
Her skal du matematisk sammenligne tal, diagrammer eller tabeller og konkludere matematisk på det, du ser. (Forhold dig IKKE til, hvorfor du tror det kan være set i et samfundsperspektiv)

Skitse
En skitse er ikke målbar, og er en grov model af en tegning. Alle tal passer dog.

Symmetriakse
En symmetriakse deler en figur, så figuren er helt ens (kongruent) på begge sider af aksen

Talfølge
En talfølge er når en række af tal fortsætter i et bestemt mønstre.

Tværsnit
Et tværsnit af en rummelig figur, er en tegning af ende fladen, der kommer, hvis man skærer figuren over.

Ydelse
Det man indbetaler pr. periode, man betaler af på et lån. Det dækker både afdrag og renten.

Kommende ord
Lineær, funktion, eksponentiel, graf, ligning, forskrift, bedste rette linje, funktionsforskrift, grafisk løsning, ligningssæt, ubekendt, førstegradsligning, begyndelsesværdi, vækstprocent, periode, stige, falde, vokse, aftage, skæring, x-akse, y-akse, omvendt proportional, hyperbel, parabel, grene, toppunkt, nulpunkt, rod og variable.

Trigonometri tabel

Vinkel (grader)	Vinkel (radianer)	Cos	sin	tan
0	0	1	0	0
5	0,087266	0,996195	0,087156	0,087488664
10	0,174533	0,984808	0,173648	0,176326981
15	0,261799	0,965926	0,258819	0,267949192
20	0,349066	0,939693	0,34202	0,363970234
25	0,436332	0,906308	0,422618	0,466307658
30	0,523599	0,866025	0,5	0,577350269
35	0,610865	0,819152	0,573576	0,700207538
40	0,698132	0,766044	0,642788	0,839099631
45	0,785398	0,707107	0,707107	1
50	0,872665	0,642788	0,766044	1,191753593
55	0,959931	0,573576	0,819152	1,428148007
60	1,047198	0,5	0,866025	1,732050808
65	1,134464	0,422618	0,906308	2,144506921
70	1,22173	0,34202	0,939693	2,747477419
75	1,308997	0,258819	0,965926	3,732050808
80	1,396263	0,173648	0,984808	5,67128182
85	1,48353	0,087156	0,996195	11,4300523
90	1,570796	0	1	0

Omregning grader/radianer

$360° = 2 \cdot \pi$

$radianer = \frac{grader \cdot \pi}{180} \qquad grader = \frac{radianer \cdot 180}{\pi}$

Gode råd til mundtlig prøve

Forberedelsen til prøven

- Det er en god ide, at I læser matematik op i grupper, så I kan få snakket noget matematik
- Fremlæg for hinanden, så I øver jer i at sige noget
- Planlæg læsning i forhold til opgivelser
- Vær udhvilet inden prøven og lav gerne noget andet efter kl. 20 aftenen inden
- Løb evt. en tur inden prøven
- Brug den sidste tid til at slappe af (i hovedet) inden prøven
- ”Prøver er en fest for den velforberedte”
  - Er I velforberedte så forlanger vi ikke mere
  - Men pas på ikke at ”over-læse”

Opstart

- Præsenter jer når I kommer ind – hils på censor med håndtryk
  - Måske vil der være en navnelabel, som I sætter på tøjet
- Det er ok at være nervøs, men lad være med at overgøre det
  - Sig det gerne til læreren inden prøvedagen

Trækning

- Kom ikke med glædesudbrud eller tårer, når emnet trækkes
  - Sig ”Ok…spændende!”

Disposition

- Dan jer et overblik over opgaven, ved at kigge den igennem
- Lav disposition
  - Vis overblik
  - Start med noget, som I føler jer sikker i, så I kommer godt i gang
    - Sørg for at alle i gruppen kommer godt i gang.
  - Sørg for at lave det, som kan bruges til at give et svar på problemstillingen.
    - Vis gerne noget forskelligt, ikke kun procentregning
  - Det er en god ide at fortælle, hvilken del af matematikken I vil arbejde med.
    - F.eks. statistik, vækst, andengradsfunktioner osv.
  - Vent ikke på lærer og censor inden I går i gang

Selve prøven

- Der findes ikke ét facit I SKAL nå frem til…men der er nogle rammer i problemformuleringen, som I skal forhold jer til
  - F.eks. står der ”lav en model”…så skal I lave en model
- Gå videre, når I umiddelbart føler, at en problemstilling er udtømt
- Skriv jeres tanker ned
- Er I i tvivl om et svar – tag et glas vand og tænk – pas på med bare at skyde
- Brug ikke meget tid på orden – Men det skal være læseligt
- Hav struktur på det, som I vil sige

- Brug ikke tid på at lave de samme beregninger flere gange
  - Brug evt. computeren ved ensartede beregninger
  - Evt. spørg om I skal vise det!
- Husk det er mundtlig matematik - Det betyder at I skal sige noget (gerne meget)
- Tro gerne, vi ikke ved noget, så skal læreren nok sige, hvis det er overflødigt.
- Tænk på det sprog, som I bruger
- Husk I skal vise, hvad I **kan**!
  - ikke hvad I ikke kan
    - F.eks. hvis man ikke kan bruge computer, skal man ikke
- Og slut med noget, I virkelig vil vise
- Computeren kan være et godt redskab
  - I bliver bedømt på jeres brug af hjælpemidler
- I skal samle op til sidst – og svare på problemformuleringen
- Husk censor er også bare en lærer!
- Lad være med at stresse – men selvfølgelig skal I ikke falde hen
- Vejen til en løsning er langt vigtigere end selve løsningen.
- Fejl behøves ikke at have stor betydning, men det er bedst, hvis I selv finder dem.
  - Ofte er det godt, at være kritisk overfor sine resultater.
- Det er vigtigt at alle er med i alle opgaver. (Evt. regne på samme opgave, hver for sig)
- Sig aldrig ”Det kan vi ikke finde ud af”. Det er langt bedre at sige ”Vi har tænkt sådan og sådan”…”Eller vi ved, at vi ikke kan gøre sådan fordi…”
  - Sidder I helt fast, er det bedre at fortælle lærer og censor om jeres overvejelser…end ikke at komme videre.
- Mange af opgaverne kender I ikke en færdig løsning (metode) på…men skal arbejde jer frem til en løsning
  - Det er ræsonnementskompetencen og modelleringskompetencen, som skal ”vise” jer svaret.
  - Det er vigtigt at I har det grundlæggende på plads og kan bruge det som redskab. F.eks. Pythagoras
    - Vi venter ikke 5 min. på, at I slår det op.
- Hvis I selv snakker…stiller lærer og censor ikke så mange spørgsmål…med mindre I er på vej ud over kanten
  - Men samtidig er prøven en samtale, så det er ikke meningen I bare skal fremlægge, uden lærer og censor blander sig.
- Brøker er bedre end afrundede decimaltal
- Hjælpearket er til dem, der ikke selv kan lave en problemløsning frem mod et svar på problemstilling.
- Gør det bedst I kan – lidt er bedre end ingenting!
  - I skal handle…Lad være med at vente på, at læreren kommer med en løsning.
  - Find den bedst mulige løsning.

Medbring

- Alm. redskaber
  - To spidse blyanter (ok at skrive med blyant, men det skal se ordentlig ud)
  - Viskelæder
  - Lineal (Ikke fra Fætter BR!)
  - Passer
  - Vinkelmåler
  - Lommeregner (Ikke mobiltelefon)
  - Egen formelsamling, som I har styr på.
  - Egne notater, som I har styr på.
- Computer
  - Styr på program
    - Excel
      - Datoproblem (f.eks. 5/5 bliver 5. Maj)
        - Formater – celler –tal
      - Decimaler (næsten altid 2)
        - Formater – celler –tal
      - Procentproblem (f.eks. 34% opfatter regneark som 0,34)
  - Husk at gemme løbende
- Hold orden
  - Medbring kun det, som I har brug for.
    - Nogle elever bruger mere tid på slik og sodavand end opgaver
    - I kan ikke komme ud og tisse
  - Sæt vand og lign. på gulvet
  - Brug de redskaber, du har brugt i løbet af året.

Hvad er godt at kunne til mundtlig prøve?

Førstegradsfunktioner	Tegne en graf til en funktionsforskrift Opstille en funktionsforskrift til nogle oplysninger Ud fra to grafer bestemme, hvor de krydser hinanden Kunne redegøre for betydning af skæring mellem to funktioner Kunne redegøre for sammenhængen mellem x- og y-værdier Kunne fortælle om ligefrem proportionalitet Beregne hvor to funktioner skærer hinanden* Kunne tegne stykvis lineære funktioner Kunne finde forskrifter for stykvis lineære funktioner*
Andengradsfunktioner	Fortælle hvad a-, (b-*), c- og D-værdiens betydning for grafen. Tegne en parabel Udregne diskriminaten Udregne nulpunkter / rødder Udregne toppunkt Kunne finde en forskrift ud fra 3 punkter* Kunne løse en andengradsligning* Udregne skæringspunkter mellem to grafer**
Ligninger	Alm. ligningsløsning og reduktion Opstille en ligningsforskrift til nogle oplysninger Kende til uligheder* Kunne anvende en CAS-funktion
Regneregler	Kunne bruge brøker Kunne bruge procent Kunne bruge potens Kunne bruge rødder Kunne udføre reduktion
Vækst	Udregne Kn Kunne arbejde med negativ vækst Kunne tegne en vækstfunktion* Finde K_0, r og n* Finde hvornår to vækstfunktioner krydser hinanden **
Omvendt proportionalitet	Opstille en funktionsforskrift til nogle oplysninger Kunne finde forskrift ud fra graf* Tegne en hyperbel Forklare om grafen kan skære akserne* Fortælle om spejlingsakser i forbindelse med en hyperbel Kunne bestemme hvad der er 1. 2. 3. og 4. kvadrant

Kunne finde konstanten og forklare hvilken betydning, den har for hyperblen
Kunne forklare, hvad det betyder, at en funktion er omvendt proportional. *

Geometri

Pythagoras - Udregne a, b og c
Kunne beregne: Areal, omkreds, rumfang, målestok og massefylde

- Herunder figurer i koordinatsystem

Kende begreber: Højde, vinkelhalveringslinje, median, midtnormal, kongruente og ligedannede trekanter, omskreven og indskreven cirkel.

Trigonometri

Bruge sinus, cosinus og tangens i forhold til retvinklet trekant
Bruge sinus, cosinus og tangens i forhold til vilkårlig trekant *
Sinusrelationen*
Cosinusrelationen**
Redegørelse for enhedscirklen **

Sandsynlighed
Kombinatorik

Have styr på begreberne: Hændelse, udfaldsrum og gunstige udfald
Kunne lave og aflæse både matrix og tælletræ
Have styr på begreberne:

- ”Både/og” og ”Enten/eller”
- Med tilbagelægning og uden tilbagelægning
- Ordnet og uordnet stikprøve *
- Permutationer og kombinationer **

Statistik

Kunne afgøre hvornår det er enkelte og grupperede observationer
Kunne bruge intervaller
Udfylde skema med h(x), H(x), f(x) og F(x)
Udregne gennemsnit, median og typetal
Finde størsteværdi, mindsteværdi og variationsbredde
Tegne sumkurve ud fra F(x)

- Trappediagram for enkelte obs.
- Sumkurve for grupperede obs.

Bestemme kvartiler
Tegne cirkeldiagram (gerne på computer)
Tegne pindediagram (enkelte obs.) (gerne på computer)
Tegne søjlediagram (grupperede obs.)
Tegne histogram (grupperede obs.) **
Tegne boksplot

Økonomi

Valutaberegninger – til og fra DKK
Kunne aflæse og lave et budget

Fart

Kunne lave beregninger med m/s og km/t

Tid	Have styr på timer, minutter og sekunder i forhold til decimaltimer og decimalminutter.
Enhedsregning	Kunne omregne mellem forskellige enheder.

IT-matematik

Have styr på de mest alm. funktioner i

- Regneark
  - Udnytte funktioner i forhold til statistik*
- WordMat (el. andet CAS-program)
  - Løse ligninger
- GeoGebra
  - Tegne geometriske konstruktioner
  - Tegne grafer

Kompetencer

Have overblik over, hvornår de forskellige kompetencer bruges.

- Modelleringskompetencen
- Ræsonnements- og tankegangskompetencen
- Hjælpemiddelkompetencen
- Kommunikationskompetencen
- Repræsentations- og symbolbehandlingskompetencen
- Problembehandlingskompetencen

* betyder, at det ikke er et krav til alle
** betyder, at det absolut ikke er et krav til alle